Malintesi diffusi sul "principio" di indeterminazione di Heisenberg

Congresso SIF 2000, Palermo
Giacomo Mauro D'Ariano

Dipartimento di Fisica 'Alessandro Volta'
via Bassi 6, I-27100 Pavia, Italy

Abstract

Il cosiddetto "principio" di Heisenberg del *gedanken experiment* che coinvolge uno schema di misure successive sullo stesso sistema singolo **non ha nessuna valitità di legge fisica**.

Esso ha ingenerato deduzioni errate nella ricerca teorica, quali lo *Standard Quantum Limit* nella misura della posizione di una massa libera.

Dal *no-cloning theorem* segue che non può esistere nessuno schema di misure ripetute che permetta di determinare lo stato di un singolo sistema quantistico (particella singola).

Conclusione: **Deve quindi esistere una precisa legge universale quantitativa del *Tradeoff Informazione-disturbo* nella misurazione: questa legge, però, non è ancora stata scritta!**

Relazione versus *Principio* di indeterminazione

- **Relazione** **Schema di misure ripetute su un ensemble di sistemi identici:** Si riprepara la particella nello stesso stato e si eseguono misure ripetute *separatamente* di p o di q. Il prodotto delle rispettive varianze dei risultati misurati è limitato inferiormente:

$$\Delta P \times \Delta Q \geq \frac{1}{2}\hbar \; .$$

  Ciò implica che: se la particella è *preparata* in uno stato con indeterminazione ΔP in momento (collimazione) [o con indeterminazione ΔQ in posizione (diaframma)], allora una misura di posizione [rispettivamente di momento] avrà varianza maggiore o uguale a quella prevista dalla relazione di Heisenberg.

- **Principio** *Interpretazione fisica intuitiva della "relazione" basata sul* **gedanken experiment** *del γ-ray microscope.* **Schema di misure successive sullo stesso sistema singolo:** Una misura di posizione con accuratezza ΔQ disturba la misura immediatamente successiva di momento determinandone una varianza ΔP in accordo alla relazione di indeterminazione $\Delta P \times \Delta Q \geq \frac{1}{2}\hbar$.

“Principio” di indeterminazione

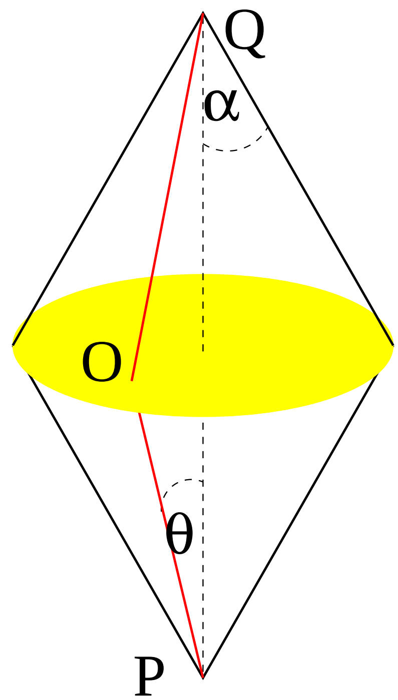
- **Heisenberg** “At the moment of the position determination, that is when the quantum of light is being diffracted by the electron, the latter changes its momentum discontinuously. This change is greater the smaller the wave length of light, that is the more precise the position determination. Hence, at the moment when the position od the electron is being ascertained, its momentum can be known only up to a magnitude that corresponds to the discontinuous change; thus, the more accurate the position determination, the less accurate the momentum determination and viceversa.”

... “$\Delta E \Delta t \geq \hbar$ shows how accurate determination of energy can be obtained only by corresponding indeterminacy in time.”

- **Messiah** **III. Uncertainty Relation and the Measurement Process.** 12. *Uncontrollable Disturbance During the Operation of Measurement.* [...] “The quantum theory, however, assumes that the unpredictable and uncontrollable disturbance suffered by the physical system during a measurement is always sufficiently strong that the uncertainty relations always hold true.”

- **Bohm** If a measurement of position is made with accuracy ΔQ and if a measurement of momentum is made *simultaneously* with accuracy ΔP, then the product of the two errors can never be smaller than a number of the order of $\hbar$.

"Principio" di indeterminazione



- Una particella in P scattera un quanto di luce $h\nu$ che segue il percorso POQ per arrivare al fuoco Q della lente.

- Natura ondulatoria della luce: La posizione della particella è nota con un'indeterminazione $\Delta x = \lambda / \sin\alpha$ pari al potere risolutivo della lente di apertura α.

- Natura corpuscolare della luce: il quanto di momento $h\nu/c$ modifica il momento della particella di $h\nu \sin\theta/c$.

- Indivisibilità del quanto: Il momento non può essere ridotto al di sotto di tale valore con un angolo di scattering inpredicibile $\theta < \alpha$ (apertura della lente).

- Pertanto il momento è indeterminato della quantità $\Delta p = h\nu \sin\alpha/c$, ovvero si ha

$$\Delta p \Delta x \geq h\nu \frac{\sin\alpha}{c} \frac{\lambda}{\sin\alpha} = \hbar \, .$$

Malintesi diffusi/interpretazioni errate del "principio"

1. L'indeterminazione è dovuta al *disturbo* incontrollabile della misura di una variabile sulla misurazione dell'altra [vedi Messiah].
2. L'indeterminazione riguarda la *misura simultanea* di variabili coniugate [vedi Bohm].

Misura simultanea di osservabili coniugate

- **Dictum:** Si possono misurare congiuntamente solo osservabili che commutano.
- **È possibile misurare congiuntamente due osservabili che non commutano in modo "non esatto", ma "ottimo" secondo un assegnato criterio.**

- Ad esempio, si misura:

$$\Pi = P + P' , \qquad \chi = Q - Q' , \qquad [\Pi, \chi] = 0 ,$$

$$\langle \chi \rangle \equiv \langle Q \rangle , \qquad \langle \Pi \rangle \equiv \langle P \rangle ,$$

$$\langle \Delta\chi^2 \rangle = \langle \Delta Q^2 \rangle + \langle \Delta Q'^2 \rangle , \qquad \langle \Delta\Pi^2 \rangle = \langle \Delta P^2 \rangle + \langle \Delta P'^2 \rangle ,$$

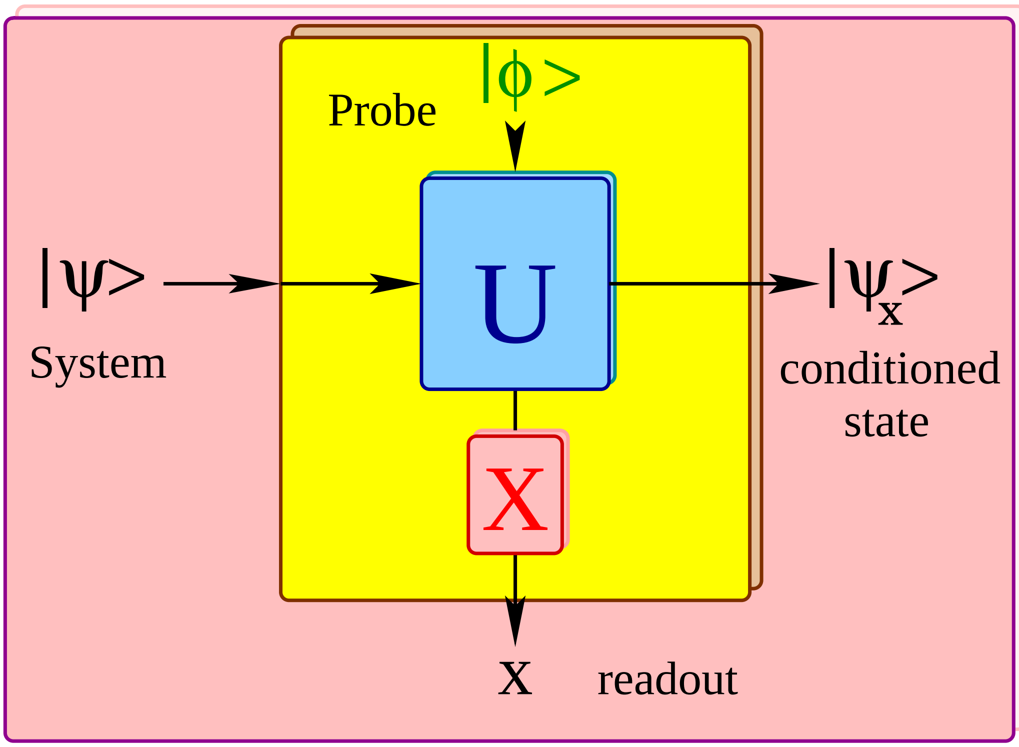
- Adottando il criterio di ottimizzazione che corrisponde a minimizzare il prodotto delle indeterminazioni si trova

$$\langle \Delta\Pi^2 \rangle \langle \Delta\chi^2 \rangle \geq \hbar^2 ,$$

- **ovvero il prodotto dei r.m.s. relativi alle precisioni delle misure congiunte è pari al doppio di quello della relazione di Heisenberg!**

Misurazioni successive sullo stesso sistema

- Schema di **misura indiretta**



- Distribuzione di probabità $p(x)$ del risultato x, e stato *condizionato* $|\psi_x\rangle$

$$p(x) = ||\Omega_x|\psi\rangle||^2 \,, \qquad |\psi_x\rangle = \frac{\Omega_x|\psi\rangle}{||\Omega_x|\psi\rangle||} \,, \qquad \Omega_x = {}_P\langle x|U|\phi\rangle_P \,,$$

- $|\psi_x\rangle$: stato che da la giusta correlazione con una successiva misura di un'osservabile qualunque, in accordo alla regola di Born.
- Si misura, ad esempio, la posizione Q, se $\overline{x} = \langle Q\rangle$.
- La misura è **esatta** se $p(x) = |\langle Q = x|\psi\rangle|^2$.
- **Conclusione:** l'effetto della misura (riduzione di stato) non è direttamente legata all'indeterminazione di osservabili prima della misura!
- **Modello di von Neumann:**

$$U = \exp[-i\kappa\tau QP_P] \,, \qquad \Omega_x = \phi(x - \kappa\tau Q) \,,$$

Derivazioni "euristiche"

- **L'indeterminazione in P non è *dovuta* alla misura di Q!**

- Originariamente Heisenberg aveva introdotto il gedanken experiment per dare una giustificazione intuitiva della non commutazione di P e Q, e, pertanto l'esperimento veniva necessariamente descritto con la meccanica classica, corpuscolare ed ondulatoria, con l'aggiunta delle relazioni di Einstein $E = h\nu$ e De Broglie $p = h/\lambda$.

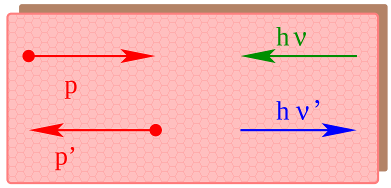
- Ma poi, **il "principio" di Heisenberg viene estrapolato come "legge fisica" euristicamente generalizzando schemi di misura descritti in modo semiclassico** [Messiah].

- Tipicamente si fanno le seguenti **approssimazioni**

  1. Non si descrive quantisticamente l'interazione, ma si invocano leggi di ottica, principi di conservazione, etc.
  2. Non si utilizza la seconda quantizzazione: ad esempio, non si specifica lo "stato" della radiazione. La radiazione è o un'onda o un corpuscolo singolo, non è mai un insieme di particelle che agiscono "coerentemente".
  3. Si utilizza $\Delta E \Delta t \geq \hbar$!
  4. Si utilizza Fourier (preparazioni: collimatori, fenditure) [OK con l'interpretazione statistica].
  5. Si assume lo sparpagliamento della funzione d'onda!

Esempio di derivazione euristica

- [Messiah] Momentum measurement through Collision with a photon (Compton effect).



- Doppler shift (non relativistico)

$$\begin{aligned} p &= mc\frac{\nu' - \nu}{\nu' + \nu} + \frac{h}{2c}(\nu' + \nu) \;, \\ p' &= mc\frac{\nu' - \nu}{\nu' + \nu} - \frac{h}{2c}(\nu' + \nu) \;, \end{aligned}$$

  da cui segue l'indeterminazione nel momento

$$\Delta p \simeq \Delta p' \simeq mc\frac{\Delta\nu'}{\nu' + \nu} \;. \tag{0.1}$$

- La misura in frequenza è tanto più precisa quanto maggiore è l'indeterminazione Δt sull'istante della collisione.

- L'incertezza della posizione dell'elettrone *dopo* la collisione è:

$$\Delta y \geq |v - v'|\Delta t \geq \frac{p - p'}{m\Delta\nu'} = \frac{h}{mc}\frac{\nu' + \nu}{\Delta\nu'} \;,$$

  ovvero

$$\Delta y \Delta p \simeq \Delta y \Delta p' \geq h \;.$$

Lo Standard Quantum Limit

- Uno dei "danni" provocati alla ricerca teorica dal "principio" di Heisenberg usato come "legge".

– $\boxed{\text{Ragionamento:}}$ in due misure successive della posizione Q di una particella libera a distanza di tempo τ la prima misura provoca uno sparpagliamento dell'impulso, la quale, nell'evoluzione libera successiva, conduce ad una indeterminazione nella posizione per la seconda misura

$$Q(\tau) = Q(0) + P(0)\frac{\tau}{m} \, ,$$

$$\Delta Q(\tau) = \frac{\Delta P(0)\tau}{m} \geq \frac{\hbar\tau}{\Delta Q(0) m} \, .$$

– La precisione ottimale è:

$$(\Delta Q(\tau))^2 = (\Delta Q(0))^2 \geq \frac{\hbar\tau}{m} \doteq (\Delta Q)^2_{SQL} \, .$$

- Ragionamento più sofisticato:[1] [2]

$$\langle \Delta Q^2(\tau)\rangle = \langle \Delta P^2(0)\rangle \frac{\tau^2}{m^2} + \langle \Delta Q(0)\Delta P(0) + \Delta P(0)\Delta Q(0)\rangle \frac{\tau}{m} \, ,$$

e come conseguenza dell'indeterminazione di Heisenberg e (assumendo tacitamente che la funzione di correlazione sia positiva!) si ottiene:

$$\langle \Delta Q^2(\tau)\rangle \geq \frac{\hbar\tau}{m} \, .$$

[1] V. B. Braginskiĭ and Yu. I. Vorontsov, *Quantum-mechanical limitations in macroscopic experiments and modern experimental technique*, Sov, Phys.-Usp., **17** (1975).

[2] C. M. Caves, K. S. Throne, R. W. P. Drever, V. D. Sandberg, and M. Zimmermann, Rev. Mod. Phys. **52**, 341 (1980)

– Purtroppo **la funzione di correlazione $\langle \Delta Q(0) \Delta P(0) + \Delta P(0) \Delta Q(0) \rangle$ può benissimo essere negativa!**[3] Ciò accade se la massa all'istante zero è preparata in uno $\boxed{\textbf{stato } \textbf{\textit{contrattivo}}}$, che, **invece di sparpagliarsi si ri-apparpaglia!**

$$\langle q|\mu\nu\alpha\omega\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar|\mu-\nu|^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}\frac{1+2i\xi}{|\mu-\nu|^2}(q-q_0)^2 + \frac{i}{\hbar}p_0(q-q_0)\right],$$

con fluttuazioni

$$\langle \Delta\hat{Q}^2(t)\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}|\mu-\nu|^2 - \frac{2\hbar\xi}{m}t + \frac{\hbar\omega}{2m}|\mu-\nu|^2 t^2 \ .$$

- Esiste un preciso modello microscopico di misura indiretta che produce lo stato contrattivo come stato condizionato alla prima misura.[4]
- Il dibattito è continuato per alcuni anni![5] [6] [7] [8] [9]

[3] H. P. Yuen, *Contractive States and the Standard Quantum Limit for Monitoring Free Mass Positions*, Phys. Rev. Lett. **51**, 719 (1983).
[4] M. Ozawa, *Quantum-Mechanical Models of Position Measurements*, Phys. Rev. A **41**, 1735 (1990).
[5] C. M. Caves, *Defense of the Standard Quantum Limit for Free-Mass Position*, Phys. Rev. Lett. **54**, 2465 (1985).
[6] R. Lynch, Phys. Rev. Lett. **52**, 1730 (1984) and Yuen's response.
[7] M. Ozawa, *Measurement Breaking the Standard Quantum Limit for Free-Mass Position*, Phys. Rev. Lett. **51**, 719 (1983).
[8] H. P. Yuen, *Violation of the Standard Quantum Limit by Realizable Quantum Measurements*, unpublished.
[9] V. B. Braginsky and F. Ya. Kalili, *Quantum measurement*, Cambridge

Teorema del No-Cloning

– **La misurazione comunque deve introdurre un disturbo** che influenza la misura successiva, *in modo tale da impedirci di conoscere esattamente lo stato della particella* in uno schema di misure successive sullo stesso sistema singolo.

- Infatti, **la possibilità di determinare lo stato ignoto di un singolo sistema quantistico in un qualunque schema di misurazioni è esclusa dal teorema del no-cloning**

  Una cloning machine realizzerebbe la seguente trasformazione:[10]

$$|\psi\rangle_1 \otimes |\omega\rangle_2 \otimes \ldots \otimes |\omega\rangle_n \longrightarrow |\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 \otimes \ldots \otimes |\psi\rangle_n$$

- **Una "cloning machine" violerebbe l'unitarietà della meccanica quantistica**. [11] [12]

  Infatti, clonare n copie di due stati nonortogonali $|\psi\rangle$ $|\varphi\rangle$ porterebbe a una diminuzione del prodotto scalare fra input e output della macchina

$$\boxed{|\langle\psi|\varphi\rangle| \longrightarrow |\langle\psi|\varphi\rangle|^n \leq |\langle\psi|\varphi\rangle|}$$

- D'altra parte, se potessimo determinare lo stato di un singolo sistema quantistico, allora potremmo prepararne n copie, realizzando una "cloning machine".

[10] W. K. Wootters, W. H. Zurek, Nature **299**, 802 (1982).
[11] W. K. Wootters, W. H. Zurek, Nature **299**, 802 (1982).
[12] H. P. Yuen, Phys. Lett. A**113** 405 (1986)

- **Non c'è quindi alcun modo di determinare lo stato di un singolo sistema quantistico, anche se si utilizza una sequenza di misure "deboli" ripetute sullo stesso sistema:**[13]
- **L'impossibilità di determinare lo stato di una particella singola—e conseguentemente la necessità di un disturbo nella misura quantistica, sono dettati, in ultima analisi, dall'unitarietà della meccanica quantistica**.
  - In anni recenti si sono avuti numerosi tentativi di determinare la funzione d'onda di un sistema singolo mediante misure ripetute deboli![14]
- È possibile determinare lo stato di un sistema quantistico solo in uno schema di misure ripetute su un "ensemble" di molti sistemi identici preparati allo stesso modo **Tomografia quantistica**[15]

[13] G. M. D'Ariano and H. P. Yuen, Phys. Rev. Lett. **76** 2832 (1996)

[14] O. Alter, and Y. Yamamoto, Phys. Rev. Lett. **74**, 4106 (1995); Y. Aharonov, J. Anandan, L. Vaidman, Phys. Rev. A **47**, 4616 (1993); Y. Aharonov and L. Vaidman, Phys. Lett. A **178**, 38 (1993); M. Ueda and M. Kitagawa, Phys. Rev. Lett. **68**, 3424 (1992); A. Imamoglu, Phys. Rev. A **47**, R4577 (1993); A. Royer, Phys. Rev. Lett. **73**, 913 (1994).

Tradeoff Informazione-Disturbo

- Ricordiamo lo schema di misura indiretta:

$$p(x) \;=\; ||\Omega_x|\psi\rangle|| \;, \qquad |\psi_x\rangle = \frac{\Omega_x|\psi\rangle}{||\Omega_x|\psi\rangle||} \;,$$

$$\Omega_x \;=\; {}_P\langle x|U|\phi\rangle_P \;,$$

- Misura *debole* significa: 1) $U = 1 + \mathcal{O}(\epsilon)$; 2) preparazione dell'apparato in uno stato $|\phi\rangle$ con "energia" finita.
- La misura debole ha una distribuzione di probabilità $p(x)$ che è poco correlata con quella intrinseca $|\langle Q = x|\psi\rangle|^2$ (ad esempio è molto "allargata"), e **fornisce poca informazione su Q!**
- D'altra parte la misura debole produce, per definizione, uno stato $|\psi_x\rangle \simeq |\psi\rangle$ poco modificato.
- Il caso limite opposto è quello della misura esatta, ovvero $p(x) = |\langle Q = x|\psi\rangle|^2$, [più in generale, x e l'autovalore di Q sono legati funzionalmente]. In questo caso è possibile dimostrare che lo stato ridotto $|\psi_x\rangle$ dipende solo dal risultato x, e non dallo stato di input $|\psi\rangle$ (solo $p(x)$ dipende da $|\psi\rangle$): il disturbo è totale, in quanto non c'è nessun ricordo dello stato prima della misura! Una misura successiva non darebbe nessuna informazione ulteriore su $|\psi\rangle$.

- Pertanto **lo schema di misure successive deboli sullo stesso sistema singolo non permette di determinare lo stato del sistema, perchè ogni misura debole è necessariamente poco informativa, mentre ogni misura informativa è necessariamente forte!**
- L'esatta relazione quantitativa nel **Tradeoff Informazione-Disturbo** della misurazione è cruciale nel determinare l'impossibilità di determinare lo stato di un sistema singolo.
- **Non è ancora apparsa in letteratura la legge quantitativa universale, indipendente dallo schema di misura, del tradeoff Informazione-Disturbo nella misurazione![16] Questo sarebbe il vero principio di Heisenberg**
- **La varianza non è una misura significativa n'è dell'informazione n'è del disturbo!**
- Esiste una quantificazione rigorosa dell'informazione ottenuta in una misura in termini di *mutua informazione*.
- Non esiste invece una quantificazione idonea del disturbo!

[16] C. A. Fuchs and A. Peres, *Quantum state disturbance vs. information gain: Uncertainty relations for quantum information*, Phys. Rev. A, **53** 2038 (1996).

Conclusione

- **La relazione di indeterminazione di Heisenberg ha un significato statistico preciso** in uno schema di misure ripetute su un ensemble di sistemi identici.
- **Il cosiddetto "principio" di Heisenberg** del *gedanken experiment* che coinvolge uno schema di misure successive sullo stesso sistema singolo **non ha nessuna validità di legge fisica**
- Esso ha ingenerato deduzioni errate nella ricerca teorica, quali lo *Standard Quantum Limit*.
- Dal *no-cloning theorem* segue che non può esistere nessuno schema di misure ripetute che permetta di determinare lo stato di un singolo sistema quantistico (particella singola).
- **Conclusione:** **Deve quindi esistere una precisa legge universale quantitativa del *Tradeoff Informazione-disturbo* nella misurazione: questa legge, però, non è ancora stata scritta!**