

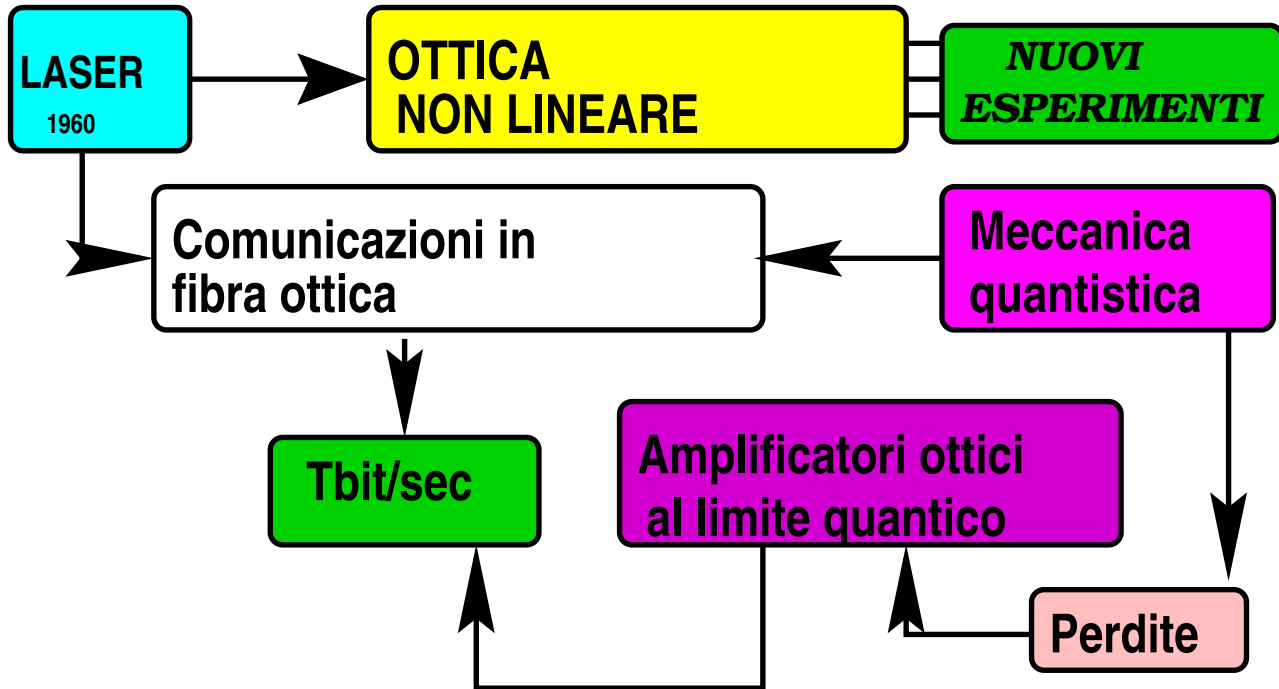
Ottica Quantistica: applicazioni e nuovi esperimenti fondamentali

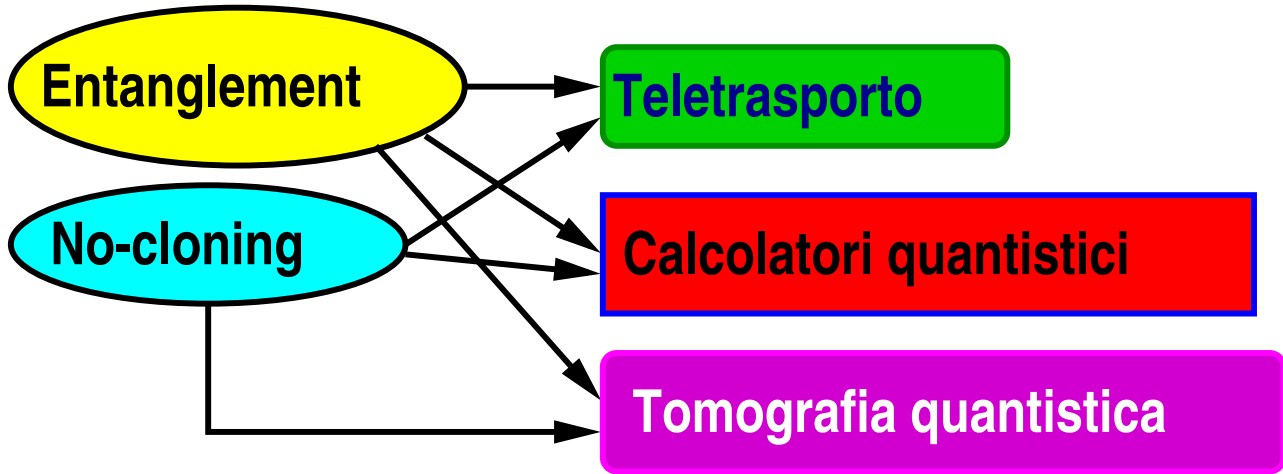
Istituto Lombardo
ACCADEMIA DI SCIENZE E LETTERE
19 novembre 1998

Giacomo Mauro D'Ariano

Dipartimento di Fisica 'Alessandro Volta', Pavia

Meccanica quantistica nel dominio ottico





Esperimenti di fondamento

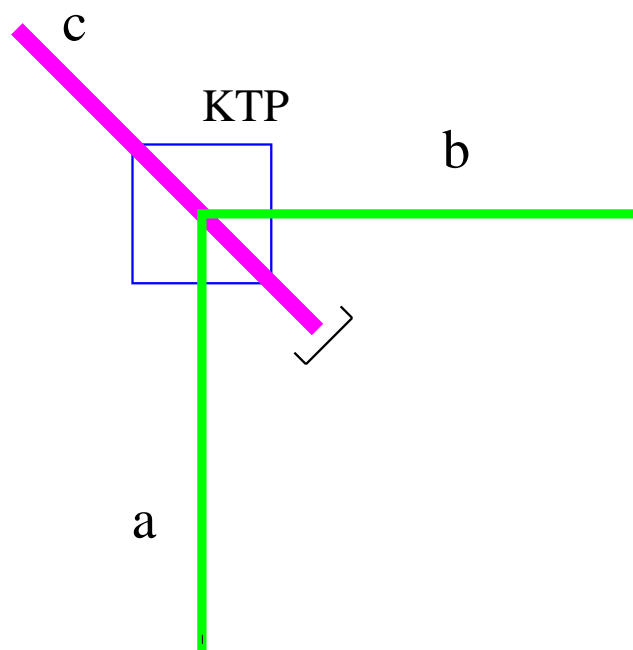
“Entanglement” quantistico

- Stato massimamente “entangled”: stato di singoletto

$$|\Psi_{12}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle - |\downarrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle)$$

- Misura di un singolo spin nella direzione \updownarrow : si trova \uparrow o \downarrow con uguale probabilità $1/2$
- Se la misura sullo spin 1 produce risultato \uparrow , allora una misura nella stessa direzione dello spin 2 dà con certezza risultato \downarrow .
- Se sullo spin 1 si ottiene \downarrow , allora sullo spin 2 si ha con certezza \uparrow
- **Tutto ciò avviene istantaneamente (superluminalmente) e senza interazione!**
- La stessa cosa si ottiene per qualunque direzione di misura, a patto di misurare i due spin nella stessa direzione.
- Se le direzioni di misura sui due spin sono ortogonali \swarrow e \searrow , i risultati sono perfettamente scorrelati
- In ogni caso **non si può trasmettere informazione superluminalmente**, poiché se stiamo sullo spin 2 otteniamo comunque un risultato casuale, e non possiamo sapere se è dovuto ad un cambiamento della direzione di misura sullo spin 1. **Le correlazioni possono essere verificate solo a posteriori**

Frequency downconversion (NOPA)



- Hamiltonian $H = ca^\dagger b^\dagger + h.c.$ where $\omega_c = \omega_a + \omega_b$.
- Produzione di stato “twin-beam”

$$|\psi\rangle \propto \sum_{n=0}^{\infty} \xi |n\rangle_a |n\rangle_b$$

- *Stato entangled*, analogo allo stato di singoletto

$$|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 .$$

Toerema del “No-cloning”

- Nello stato massimamente entangled $|\Psi_{12}\rangle$ lo “stato” dello spin 2 dopo la misura è sempre opposto a quello corrispondente al risultato della misura sullo spin 1
- In principio, sarebbe possibile comunicare superluminalmente solo se fosse possibile misurare lo stato di un singolo sistema quantistico (spin)!
- Ma la possibilità di misurare lo stato ignoto di un singolo sistema quantistico è esclusa dal teorema del no-cloning

L’argomento della cloning-machine (Wooters-Zurek)

(Yuen version)

$$|\psi\rangle_1 \otimes |\omega\rangle_2 \otimes \dots \otimes |\omega\rangle_n \longrightarrow |\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 \otimes \dots \otimes |\psi\rangle_n$$

- Una “cloning machine” violerebbe l’unitarietà della meccanica quantistica.

Infatti, clonare n copie di due stati nonortogonali $|\psi\rangle$ $|\varphi\rangle$ porterebbe a una diminuzione del prodotto scalare fra input e output della macchina

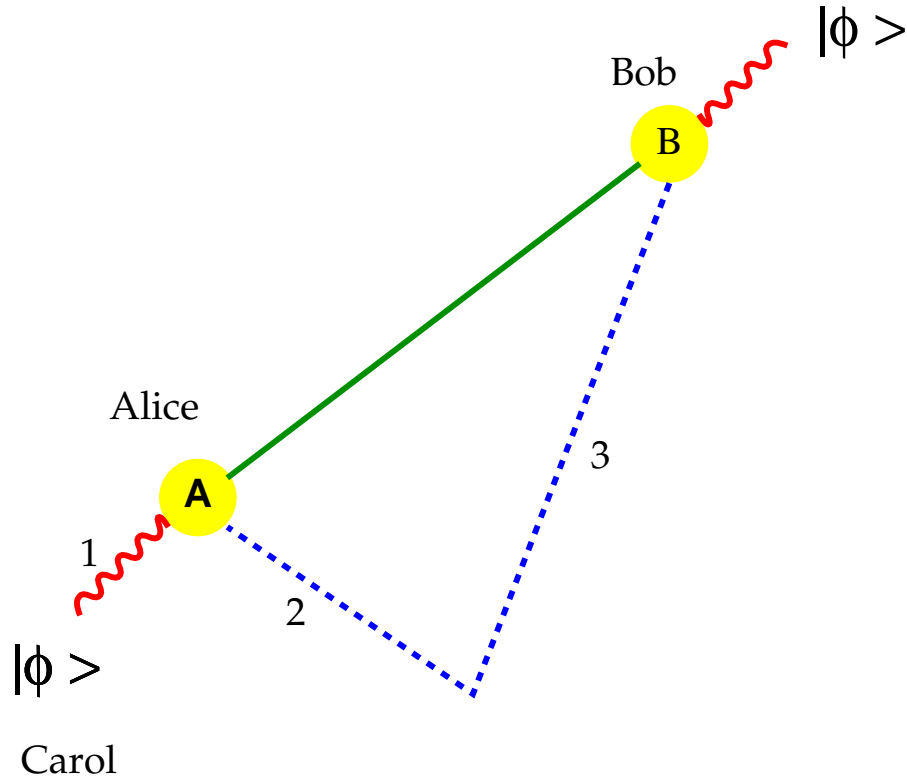
$$|\langle\psi|\varphi\rangle| \longrightarrow |\langle\psi|\varphi\rangle|^n < |\langle\psi|\varphi\rangle|$$

- D’Altra parte, se potessimo determinare lo stato di un singolo sistema quantistico, allora potremmo prepararne n copie, realizzando una “cloning machine”.
- Non c’è quindi alcun modo di determinare lo stati di un singolo sistema quantistico, anche se si utilizza una sequanza di misure “deboli” ripetute sullo stesso sistema [G. M. D’Ariano and H. P. Yuen, Phys. Rev. Lett. **76** 2832 (1996)]
- È possibile determinare lo stato di un sistema quantistico solo eseguendo molte misure su un “ensemble” di molti sistemi identici preparati allo stesso modo → **Tomografia quantistica**

Teletrasporto quantistico

- **Teleportation:** [Oxford English Dictionary (2nd ed. 1989)] *Psychics and Science Fiction*. The conveyance of persons (esp. of oneself) or things by psychic power; also in futuristic description, apparently instantaneous transportation of persons, etc., across space by advanced technological means.
- C. H. Bennet, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, W. K. Wootters, *Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channel*, Phys. Rev. Lett. **70** 1895 (1993)
- *Secondo la teoria quantistica dei campi, tutte le particelle nell'universo sono indistinguibili. L'identità di un oggetto da teletrasportare risiede unicamente nel suo stato quantico*
- Quindi, teletrasporto significa ricostruire lo stato quantico di un oggetto in un luogo distante
- Problemi:
 1. Non possiamo determinare lo stato di un singolo oggetto (teorema del no-cloning)
 2. La trasmissione della descrizione di uno stato noto di un solo spin (sistema a due livelli) necessiterebbe la trasmissione di una enorme quantità di bit, a seconda della precisione della descrizione dello stato (per uno spin è data da un numero complesso)
- Risultato eclatante di BBCJPW: Non è necessario conoscere lo stato quantico per teletrasportarlo (anzi, non dobbiamo assolutamente conoscerlo!) Per il teletrasporto di uno spin bastano solo 2 bit di informazione + un canale massimamente entangled!

Teletrasporto quantistico



- Carol consegna ad Alice uno stato $|\phi\rangle$ da teletrasportare a Bob.
- Alice e Bob condividono un **canale classico** ed uno **quantistico massimamente entangled**

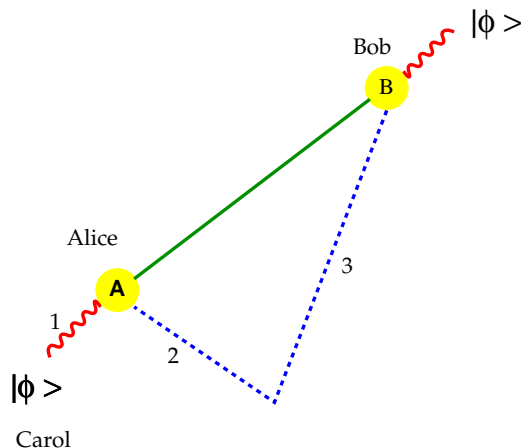
$$|\Psi_{23}^-\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} (|\uparrow_2\rangle|\downarrow_3\rangle - |\downarrow_2\rangle|\uparrow_3\rangle)$$

- Alice correla la particella 1 con la coppia entangled 2-3 eseguendo la seguente misura completa descritta dal set ortonormale di Bell

$$|\Psi_{23}^\pm\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} (|\uparrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle - |\downarrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle)$$

$$|\Phi_{23}^\pm\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} (|\uparrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle - |\downarrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle)$$

Teletrasporto quantistico



- Scriviamo lo stato ignoto della particella 1 come segue

$$|\phi\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

- Lo stato delle tre particelle prima della misura è

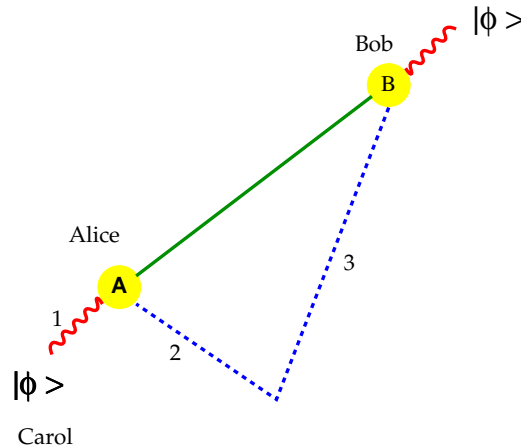
$$\begin{aligned} |\Psi_{123}\rangle = |\phi_1\rangle|\Psi_{23}^-\rangle &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}} (|\uparrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle|\downarrow_3\rangle - |\uparrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle|\uparrow_3\rangle) \\ &+ \frac{\beta}{\sqrt{2}} (|\downarrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle|\downarrow_3\rangle - |\downarrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle|\uparrow_3\rangle) \end{aligned}$$

- che in termini della base di Bell può essere riscritto come segue

$$\begin{aligned} |\Psi_{123}\rangle &= \frac{1}{2} [|\Psi_{12}^-\rangle \underbrace{(-\alpha|\uparrow_3\rangle - \beta|\downarrow_3\rangle)}_{-|\phi_3\rangle} + |\Psi_{12}^+\rangle \underbrace{(-\alpha|\uparrow_3\rangle + \beta|\downarrow_3\rangle)}_{-\sigma_z|\phi_3\rangle} \\ &+ |\Phi_{12}^-\rangle \underbrace{(\beta|\uparrow_3\rangle + \alpha|\downarrow_3\rangle)}_{-\sigma_x|\phi_3\rangle} + |\Phi_{12}^+\rangle \underbrace{(-\beta|\uparrow_3\rangle + \alpha|\downarrow_3\rangle)}_{-i\sigma_y|\phi_3\rangle}] \end{aligned}$$

- Alice trasmette (sul canale classico) a Bob il risultato della misura. Se il risultato è Ψ^- Bob non fa nulla e sa che ha già lo stato giusto sulla particella 3. Se è Ψ^+ Bob fa una rotazione dello spin di 180° attorno all'asse z . Altrimenti se è Φ^- Bob fa una rotazione di 180° attorno all'asse x . Se è Φ^+ Bob fa una rotazione di 180° attorno all'asse y .

Teletrasporto quantistico



- Schema generale:

1. Occorrono **due canali di trasmissione**, un canale classico ed uno quantistico massimamente entangled
2. Alice esegue una **misura che correla** il canale entangled con quello che supporta lo stato ignoto da teletrasportare
3. A seconda del risultato della misura di Alice, Bob esegue una **trasformazione unitaria** sul suo canale

- Il **segreto del teletrasporto** è quello di fare una misura che non fornisce alcuna informazione sullo stato ignoto da teletrasportare!

- Osservazioni:

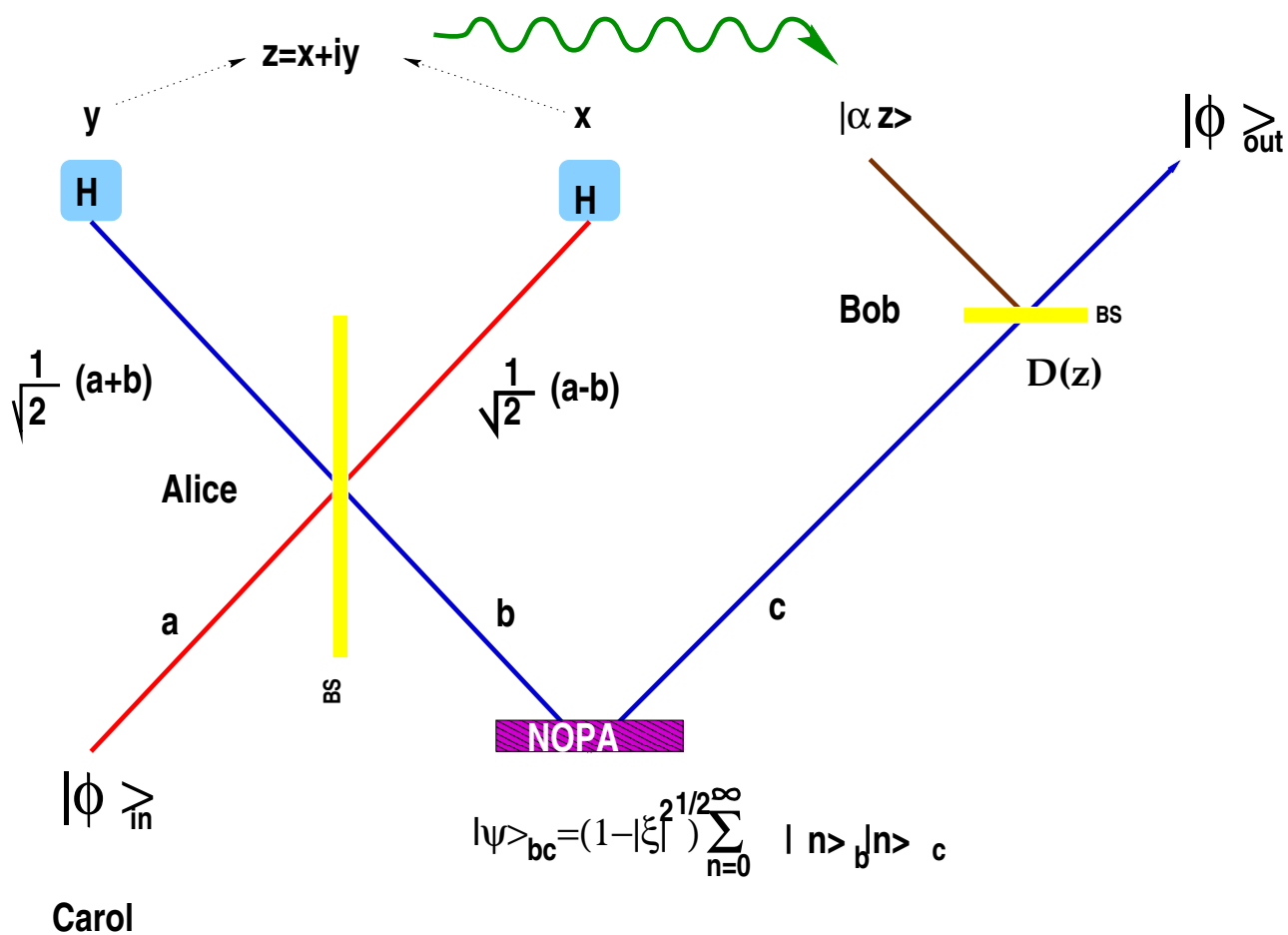
1. La correlazione quantistica sul canale entangled è superluminale, ma l'informazione classica viaggia a velocità della luce (pertanto occorre ritardare il canale entangled). Lo stato viene quindi teletrasportato alla velocità della luce.
2. Il teletrasporto funziona anche con stati entangled (entanglement swapping)
3. Si può generalizzare a qualunque dimensione dello spazio di Hilbert

Teletrasporto quantistico

- Esperimenti:

1. D. Boschi, S. Branca, **F. De Martini**, L. Hardy and S. Popescu, Phys. Rev. Lett. **80**, 1121 (1998).
2. D. Bouwmeester, J. W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, **A. Zeilinger**, Nature **390**, 575 (1997).
3. A. Furusawa, J. Sørensen, S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, **H. J. Kimble** and E. S. Polzik, Science, **282**, 706 (1998).

- Esperimento del gruppo di Kimble al Caltech: teletrasporto di uno stato quantico di un oscillatore armonico bosonico (modo della radiazione). Lo spazio di Hilbert è di dimensione infinita.



- Si ha teletrasporto perfetto nel limite di efficienza quantica uno ai rivelatori e guadagno infinito al NOPA.

Computer quantistici

La legge di Moore

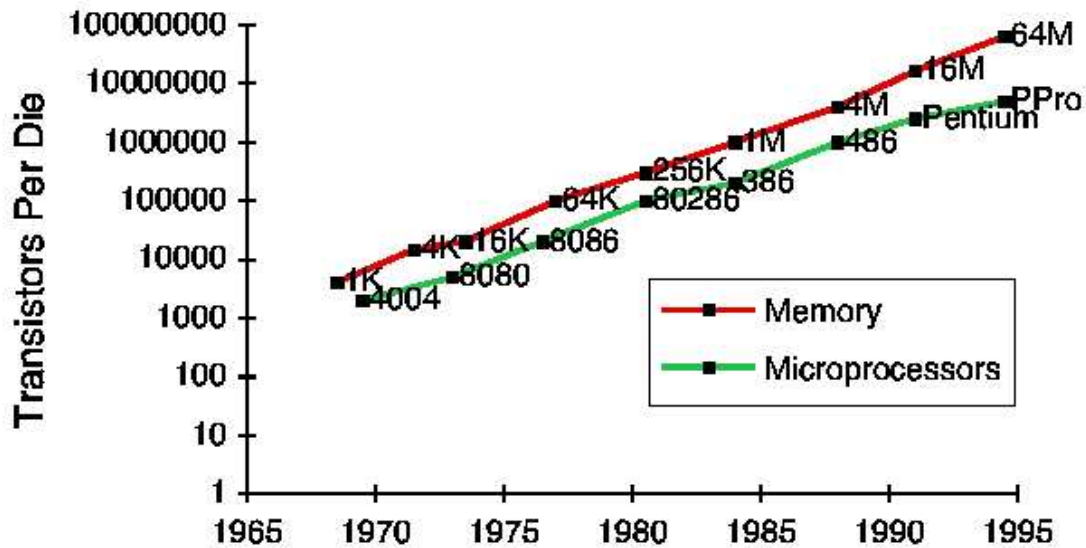


Figure 1: Moore's Law: the number of transistors on a die/micro-chip [Moore, 1997 special issue of Scientific American devoted to the computer technology]

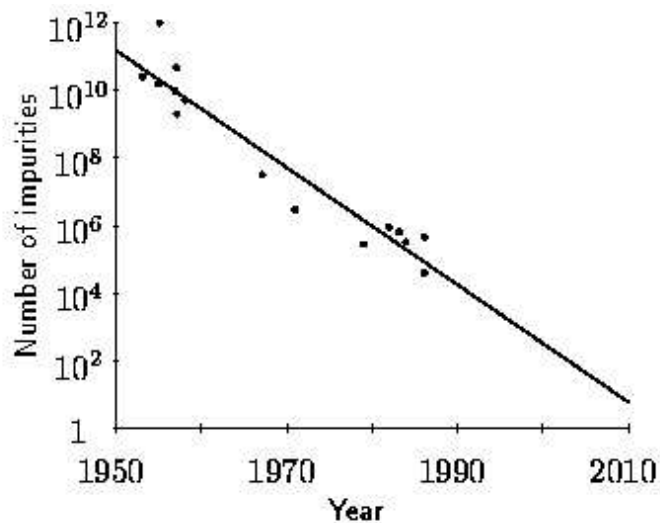


Figure 2: Number of dopant impurities involved in logic in bipolar transistors with year [R. W. Keyes, IBM J. Res. Develop. **32**, 24 (1988)]

Cross-talk

3D wiring

Correnti molto piccole

Dissipazione del calore

Calcolo reversibile

- La dissipazione di calore in principio è dovuta solo alla cancellazione dei dati
- La dissipazione minima di energia per cancellare un bit è pari a $K_B T \log 2$ [R. Landauer 1961]
- È possibile eseguire ogni **calcolo senza ERASE** utilizzando **junk bits** [C. Bennet 1973]

$$f : a \rightarrow (a, f(a))$$

- Ad ogni stato intermedio la cancellazione si può ottenere facendo andare **il calcolo alla rovescia**

$$\begin{aligned} f : a &\rightarrow (a, j(a), f(a)) \\ &\rightarrow (a, j(a), f(a), f(a)) \quad (\text{FANOUT}) \\ &\rightarrow (a, f(a)) \quad (\text{uncomputing}) \end{aligned}$$

A	B	AND	OR	XOR	NOT B
0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

- Gates irreversibili: AND, OR, XOR

- **Gate universale reversibile di Toffoli**

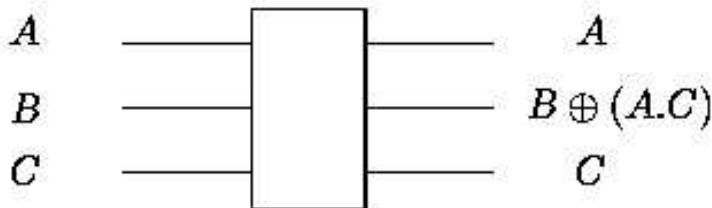


Figure 3: Three-input three-output universal reversible Toffoli gate. This gate is clearly reversible since a second application of it retrieves the original input.

Qubits

- Sistema quantistico a due livelli:

$$\boxed{|0\rangle, |1\rangle \quad \text{or} \quad |\downarrow\rangle, |\uparrow\rangle}$$

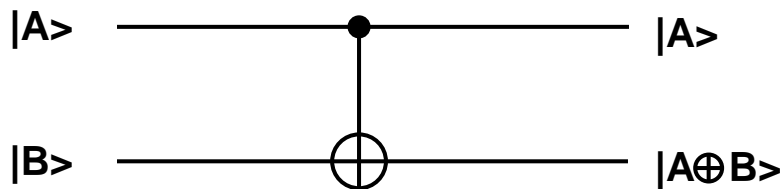
Esempio: $|25\rangle = |11001\rangle = |\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle$

- **Utilizzando sovrapposizioni** $|\psi\rangle = \alpha|\downarrow\rangle + \beta|\uparrow\rangle$,

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

permette di avvantaggiarsi della dimensione esponenziale dello spazio di Hilbert (2^k per k qubits) in un **calcolo parallelo quantistico!**

- Quantum **controlled-NOT** gate (XOR) realizzata con trasformazione unitaria



- **Realizzazione del gate di Toffoli** (U + controlled-NOT: set universale)

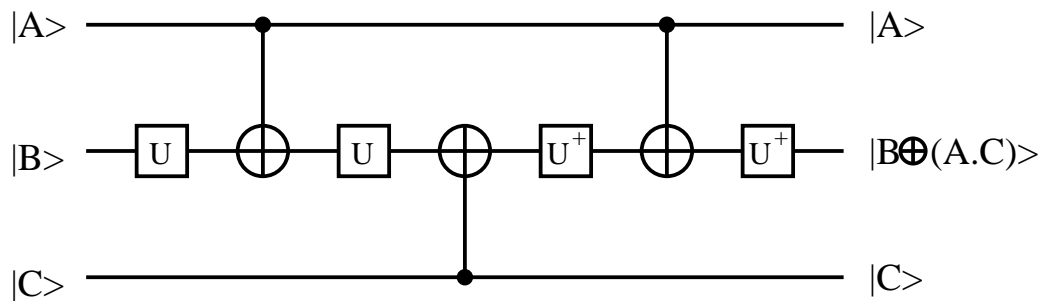


Figure 4: Toffoli gate built from two-bit XOR gates plus some one-bit gates: $U|\downarrow\rangle = -1|\uparrow\rangle$, $U|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle$

Calcolo parallelo quantistico

- È possibile **calcolare una funzione f in parallelo** su un quantum computer $q = 2^k$:

$$|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{a=0}^{q-1} |a\rangle \quad (\text{trasformata di Hadamard})$$

per esempio, per 2 qubits

$$|0\rangle \rightarrow \frac{1}{2} \{|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle + |3\rangle\}$$

- Aggiungere un secondo registro e **calcolare f mediante una trasformazione unitaria U_f**

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{a=0}^{q-1} |a\rangle |0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{a=0}^{q-1} |a\rangle |f(a)\rangle$$

- **I due registri sono *entangled***

- Per soli $k = 140$ qubits il computer calcola e tiene in memoria più risultati che le particelle dell'universo!
- Però, questi risultati non sono accessibili a piacimento, (bensì in modo casuale), ma un singolo risultato di interesse che dipende da essi può essere ottenuto mediante un'appropriata misura quantistica sulla sovrapposizione!

Calcolo parallelo quantistico

- Il **segreto del quantum computer** è:
 1. Calcolare una funzione con una trasformazione unitaria in parallelo, tenendola in memoria su uno stato *entangled*.
 2. La Meccanica Quantistica ci impedisce di leggere a piacimento i risultati: ci permette al massimo di leggerne uno a caso.
 3. In compenso i risultati possono essere utilizzati per un calcolo successivo!
 4. Con una misura finale si legge il risultato di interesse, e se necessario si ripete il calcolo dall'inizio.

Fattorizzazione di numeri

- Classe di *complessità di un algoritmo di calcolo*: numero di steps per calcolare la soluzione versus la dimensione dell'input

Nel problema della fattorizzazione del numero N la dimensione dell'input è il numero di cifre di N (ovvero $\log N$).

- **Per la fattorizzazione, la complessità è esponenziale!**
Il miglior algoritmo noto di fattorizzazione impiega un tempo di esecuzione dell'ordine di:

$$O(\exp[(64/9)^{1/3}(\log N)^{1/3}(\log \log N)^{2/3}])$$

- Esempi:

- (RSA129): nel 1994 sono occorsi 8 mesi di calcolo parallelo di 1600 workstations per fattorizzare un numero di 129 digits
- Alla stessa velocità occorrerebbero 800.000 anni per un numero di 250 cifre
- e 10^{25} anni per 1000 cifre!

- **Algoritmo quantistico di Peter Shor**: esegue la fattorizzazione in **tempo polinomiale**! $O((\log N)^{2+\epsilon})$:
 - Per 1000 cifre basterebbero solo alcuni milioni di steps!

Metodo di Riesel per fattorizzare numeri

- **Metodo probabilistico** per trovare fattori di un numero N (dispari)

1. Selezionare a caso un numero y co-primo di N , $1 \leq y \leq N$, (coprimo: $\gcd(y, N) = 1$. \gcd : massimo comune divisore).
2. Calcolare il periodo r di $y \bmod N$ (ovvero $y^r = 1 \bmod N$)
3. Se r è pari e $x = y^{r/2} \neq \pm 1 \bmod N$, allora $\gcd(N, x \pm 1)$ sono fattori non banali di N

- Per $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, p_i numeri primi,

$$\text{Prob} \left\{ r \text{ even and } y^{r/2} \neq \pm 1 \bmod N \right\} \geq 1 - \frac{1}{2^{k-1}}$$

ovvero la probabilità di successo $\geq 1/2!$ (è zero solo per il caso $N = p^\alpha$, dove, comunque, è disponibile un algoritmo molto efficiente per determinare se N è una potenza di un numero primo)

- Per il \gcd c'è l'**algoritmo di Euclide** (molto efficiente)

- Quindi il problema è ricondotto a trovare un algoritmo efficiente per calcolare il periodo r in $y^r = 1 \bmod N$!

- Esempio: $N = 15$ $y = \{2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$ ($\gcd(N, y) = 1$)

$$y = 11, \quad y^2 = 1 \bmod 15, \quad y^3 = 11 \bmod 15, \dots \rightarrow r = 2$$

$$\rightarrow x = 11, \quad x \pm 1 = 10, 12, \quad \gcd(10, 15) = 5, \quad \gcd(12, 15) = 3$$

Si noti che in questo caso i periodi $r = \{4, 2, 4, 4, 2, 4, 2\}$ sono tutti pari

Per $y = 14$ il metodo non fallisce: $y^{r/2} = -1 \bmod 15$

Trasformata di Fourier quantistica

- Trasformata di Fourier discreta ($q = 2^k$, k qubits):

$$DFT_q \quad |a\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{c=0}^{q-1} e^{2\pi i ac/q} |c\rangle$$

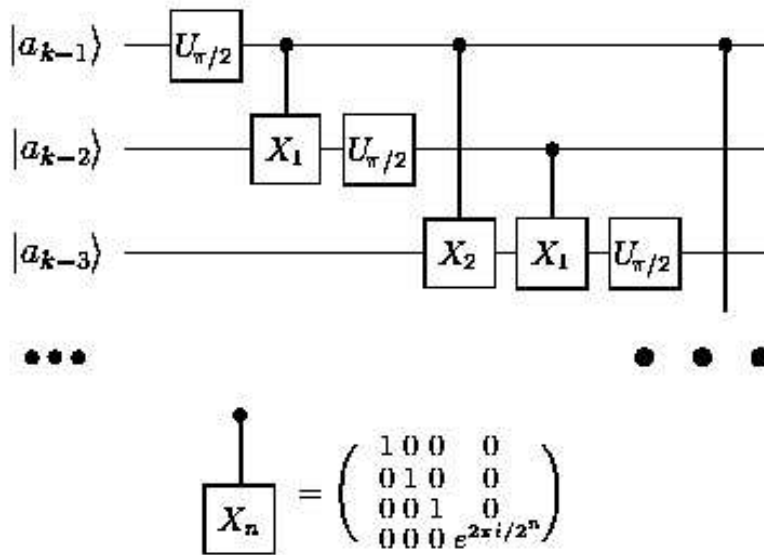


Figure 5: Circuit for the quantum Fourier transform of the variable using Coppersmith's fast Fourier transformation approach.

Algoritmo quantistico di Shor

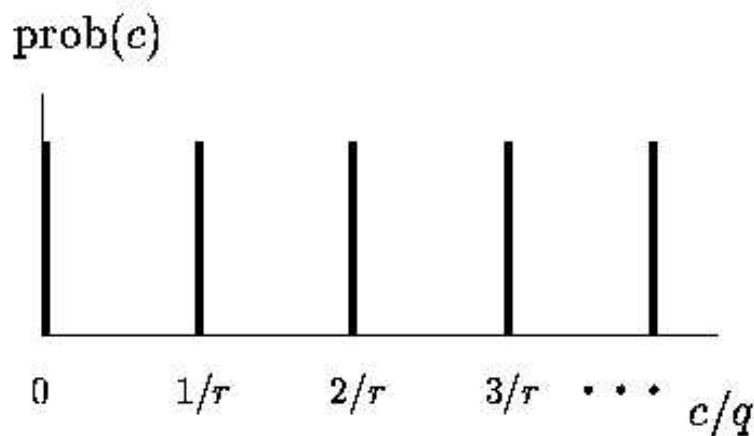
- Si calcoli la funzione f in parallelo quantistico

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{a=0}^{q-1} |a\rangle |0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{a=0}^{q-1} |a\rangle |f(a)\rangle$$

- Se ne faccia la trasformata di Fourier

$$\rightarrow \frac{1}{q} \sum_{a=0}^{q-1} \sum_{c=0}^{q-1} e^{2\pi i ac/q} |c\rangle |f(a)\rangle = \sum_{c=0}^{q-1} |c\rangle \underbrace{\left[\sum_{a=0}^{q-1} \frac{1}{q} e^{2\pi i ac/q} |f(a)\rangle \right]}_{\#}$$

- Se la funzione è periodica $f(a+r) = f(a)$ la somma $\#$ *interferisce costruttivamente solo se c/q è un multiplo di $1/r$* : altri valori producono interferenza essenzialmente distruttiva. Se si misura c nel primo registro, la distribuzione di probabilità $p(c)$ dei valori misurati è

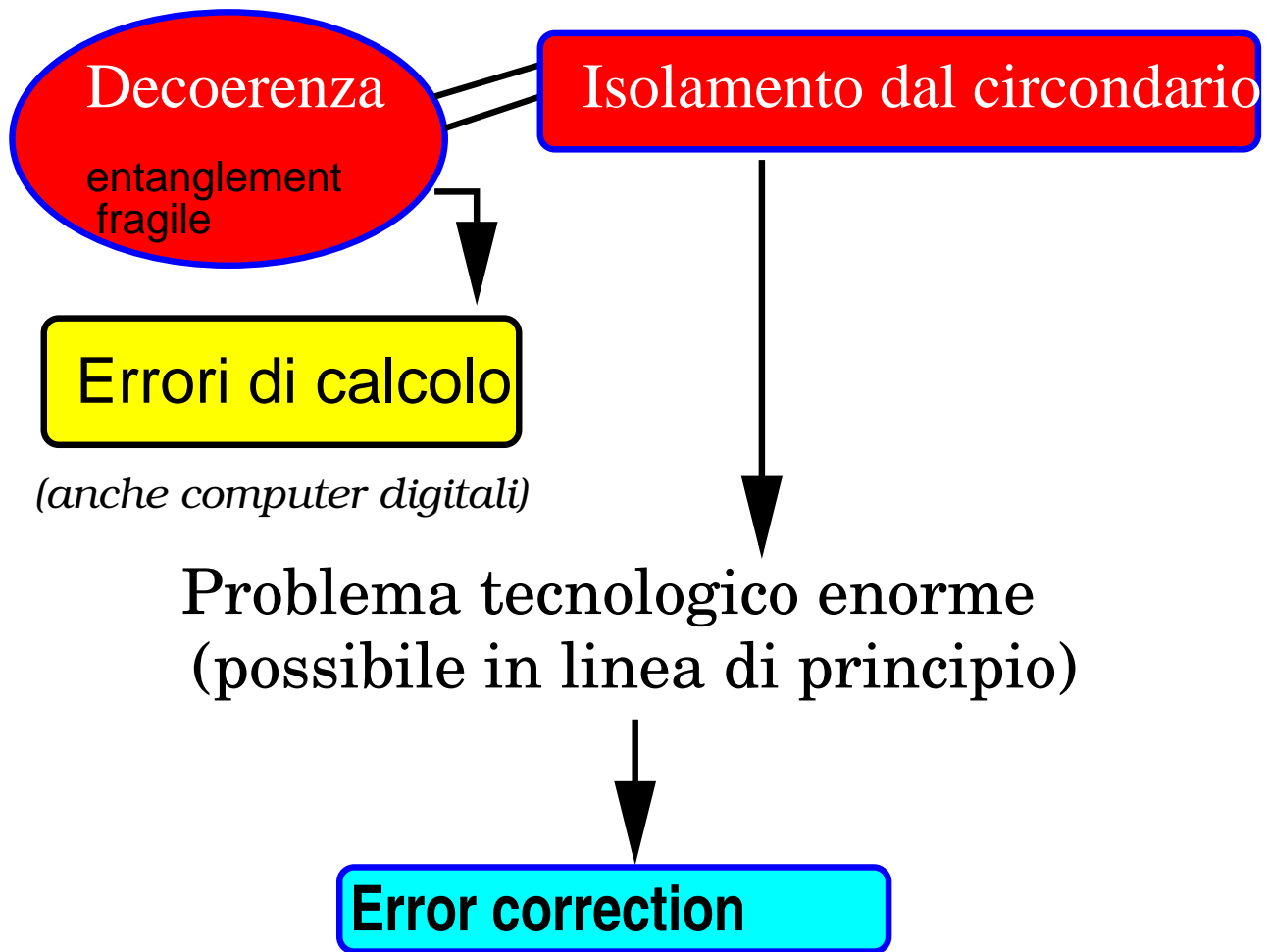


- Per estrarre il periodo r bisogna rilanciare il programma un numero di volte $\sim \log \log r/k$ per ottenere probabilità $\simeq 1$ che uno dei multipli sia co-primo di r , dimodoché si possa estrarre r univocamente.

Speed-up quantistico di altri problemi

- Per fattorizzare numeri occorrono molti qubits $k > 2 \log_2 N$
- Però, per **simulare un sistema quantistico** di 20 qubits abbisognano proprio 20 qubits (+ i qubits necessari per l'error-correction), ma nessun *computer classico* potrebbe mai eseguire una tale simulazione (occorrerebbe diagonalizzare una matrice di dimensione $10^6 \times 10^6!$)
- **Algoritmo di Grover** per ricerca su database: speedup da $O(N)$ a $O(N^{1/2})$
- Il parallelismo quantistico è congegnato in modo da velocizzare problemi che non necessitano di calcolare esplicitamente un numero esponenzialmente grande di soluzioni, e/o soluzioni con range esponenzialmente grande. Pertanto, *una soluzione forza bruta dei problemi più difficili—i **problemi NP-completi**—non può essere velocizzata*
- *La soluzione di un solo problema NP-completo rappresenterebbe il risultato di gran lunga più importante della storia dell'informatica (e forse della scienza in genere), con impatto enorme sulla tecnologia!*
- H. P. Yuen ha recentemente scoperto un modo di utilizzare un *calcolatore quantistico e la tomografia quantistica* per risolvere un **problema NP-hard**, ma si tratta solo di una soluzione approssimata.

Decoerenza e errori di calcolo



Errori di fase

Accumulazione degli errori nel tempo

Diagnosi dell'errore?

La misura distrugge coerenza
ed entanglement

Ridondanza della codifica?

No-cloning!

Error-correction quantistica

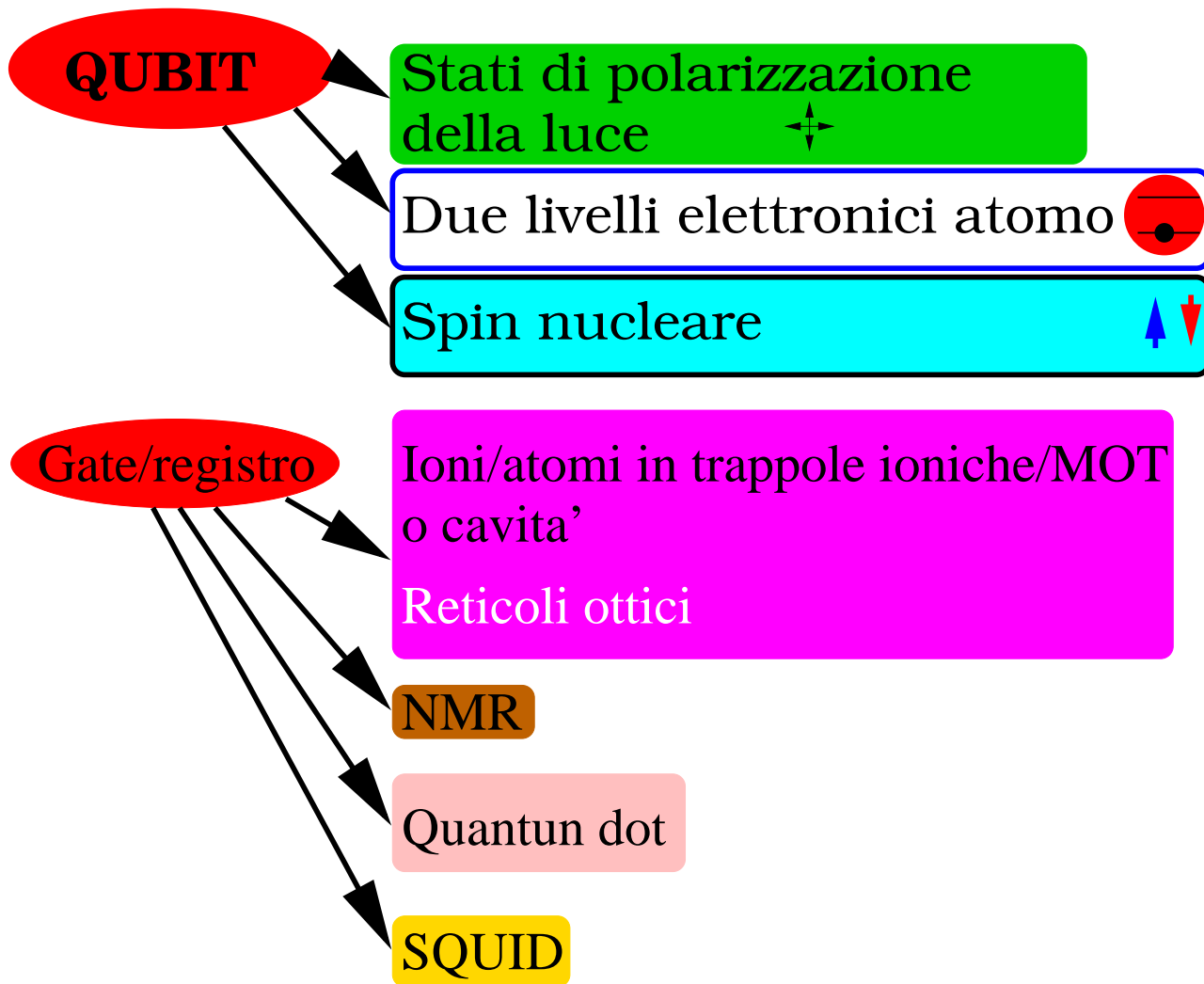
- Risultato eclatante:

l'error correction quantistica è possibile!

[P. Shor (1995), A. Stean (1996)]

- Metodo generale: **combattere l'entanglement con l'entanglement**
 1. Aggiungere qubits e allargare lo spazio di Hilbert in modo che gli errori guidino il calcolatore su spazi ortogonali.
 2. Eseguire una misura che dica in quale sottospazio si trova il calcolatore.
 3. Fare quindi una trasformazione unitaria che dipende dal risultato della misura, allo scopo di correggere l'errore.
- Si noti che la misura nella diagnostica dell'errore non deve fornire nessuna informazione sui qubits usati per il calcolo.
- **analogia con il teletrasporto** entanglement + misura noninformativa + trasformazione unitaria che dipende dal risultato

Hardware quantistico



- Maggiori **gruppi impegnati in esperimenti**

1. Jeff Kimble (Caltech, Pasadena)
2. Serge Haroche, (Ecole Normal Supérieure, Parigi)
3. Dave Wineland, (NIST, Boulder)
4. Neil Gershenfeld (MIT) e Ike Chuang (Stanford)
5. Herbert Walther, (Max Planck, Monaco)

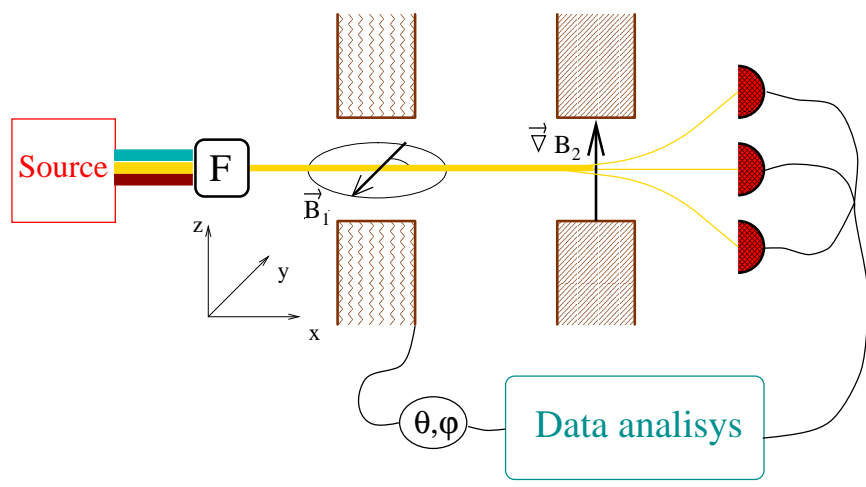
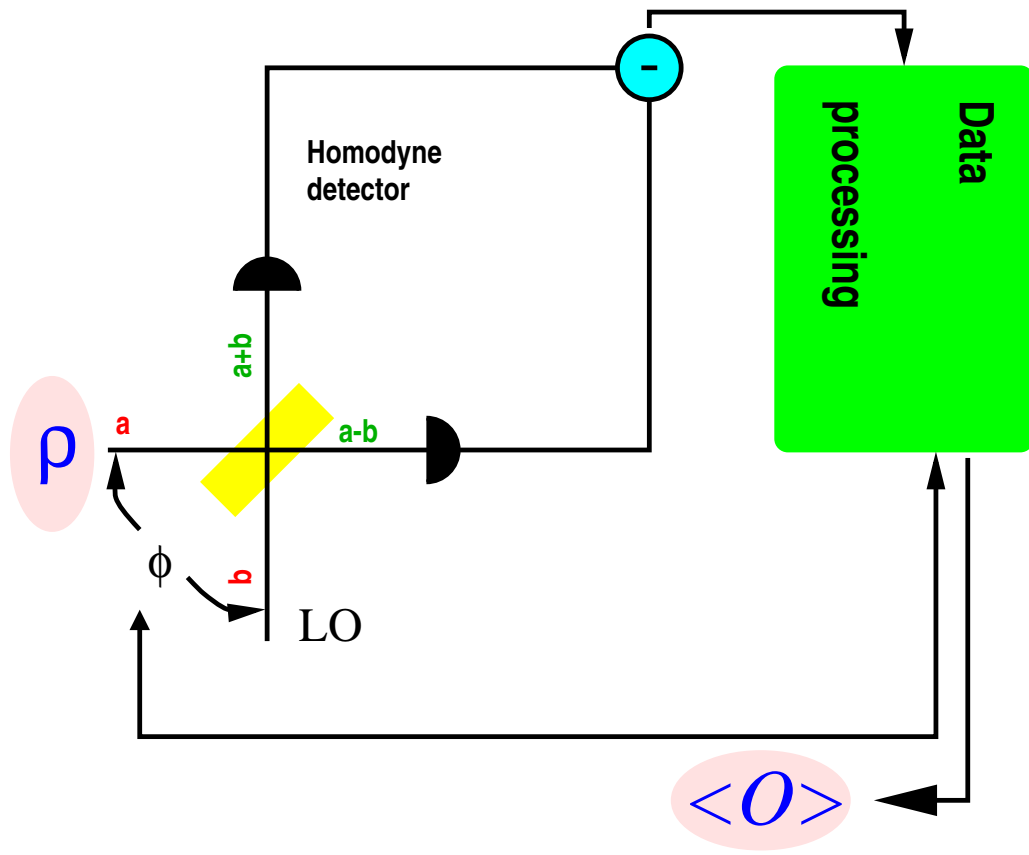
Tomografia Quantistica

Tomografia omodina

Detector universale per la radiazione
Misura qualunque "osservabile"
con qualunque numero di modi

Tomografia di spin e sistemi a piu' livelli

Tomografia quantistica



Tomografia quantistica omodina

- Maggiori **gruppi impegnati in esperimenti**

1. M. Raymer (Eugene, Oregon)
2. J. Mlynek (Costanza)
3. P. Kumar (Northwestern)

- **Nuovi esperimenti**

1. Test della **Riduzione di stato** e Correlazione Quantistica (collaborazione con P. Kumar, Northwestern)
2. Misura dello **stato GHZ** (collaborazione con Y. Shih, Baltimora)
3. Soluzione approssimata di un **problema NP-hard** (permanente di una matrice) mediante tomografia su stato simmetrico (proposta teorica, con H. Yuen)
4. Verifica tomografica delle **disuguaglianze di Bell**
5. Osservazione di piccoli **gatti di Schrödinger** della radiazione

Test della Riduzione di stato e Correlazione Quantistica

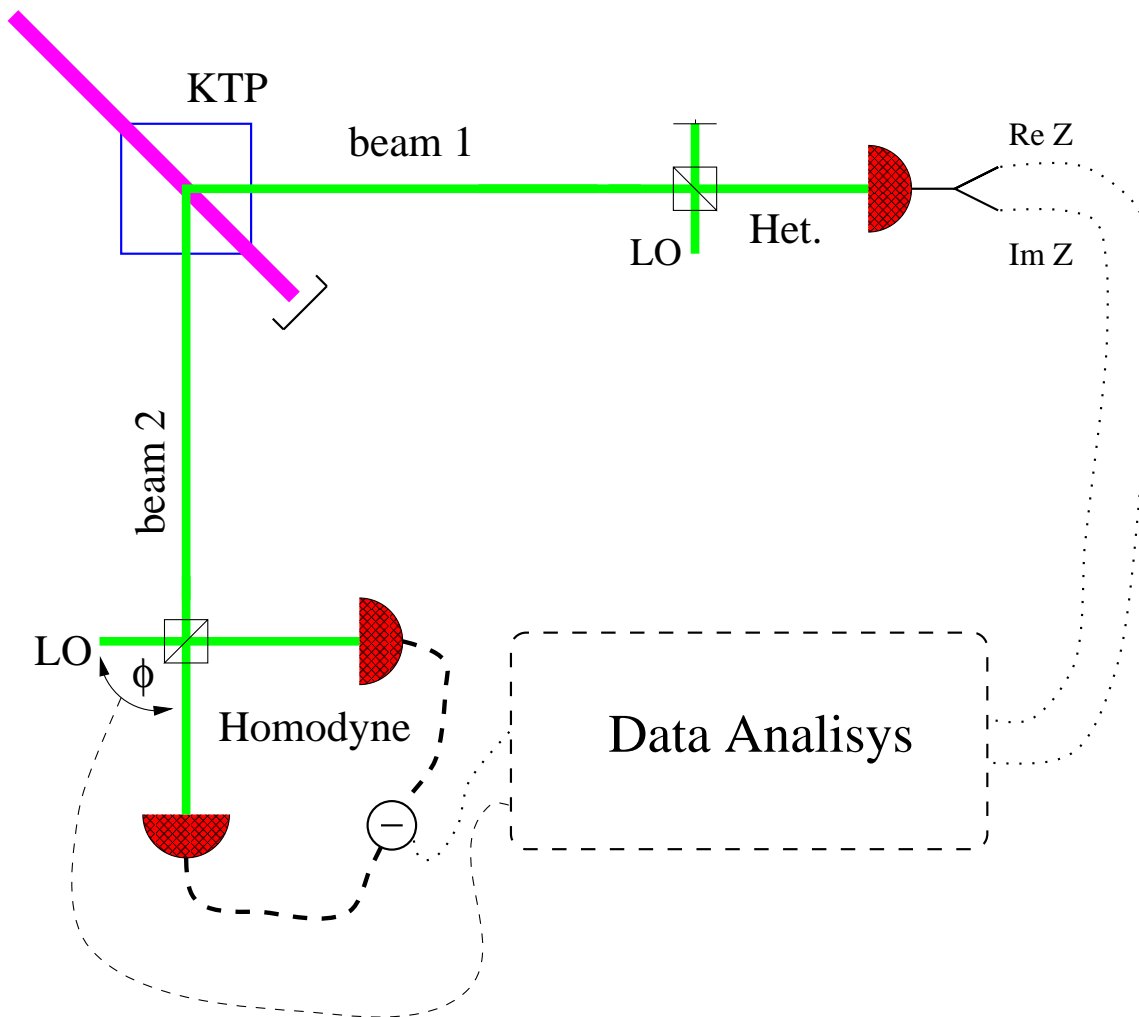


Figure 6: Scheme for testing SR for heterodyne detection. A NOPA generates a pair of twin beams (1 and 2). After heterodyning beam 1, the reduced state of beam 2 is measured optical homodyne tomography conditioned by the heterodyne outcome. In place of the heterodyne detector one can put any other kind of detector for testing SR on different observables. Here we also analyze the case of direct photodetection.

Stato GHZ (Greenberger Horn Zeilinger)

- (Versione di Mermin) Autostato simultaneo delle osservabili:

$$\begin{aligned} & \sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^3 \equiv 1 \\ \times & \sigma_y^1 \sigma_x^2 \sigma_y^3 \equiv 1 \\ \times & \sigma_y^1 \sigma_y^2 \sigma_x^3 \equiv 1 \\ = - & \sigma_x^1 \sigma_x^2 \sigma_x^3 \equiv 1 \end{aligned}$$

- **“Classicamente”**: se si moltiplicano i valori dicotomici $\sigma_\alpha = \pm 1$ incolonnati a sinistra **si ottiene 1 anzichè -1!** **Test stringente di teoria classica a variabili nascoste, senza disuguaglianze di Bell!**

Problema NP -hard: permanente di una matrice

- “Misura” del permanente della matrice \mathcal{A} :
 - Si misura tomograficamente l'osservabile $\otimes^n A$, dove $\mathcal{A}_{i,j} = \langle e_i | A | e_j \rangle$ sullo stato simmetrizzato

$$|\psi\rangle = \sum_{\sigma} |e_{\sigma(1)}\rangle \dots |e_{\sigma(n)}\rangle$$

$$\frac{d \text{ Tecnologia}}{d t} = \alpha \text{ Idee}$$

$$\frac{d \text{ Idee}}{d t} = \beta \text{ Tecnologia}$$



$$\text{Tecnologia} \sim e^{\sqrt{\alpha\beta} t}$$