UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA
FACOLTA' DI SCIENZE MAT. FIS. NAT.

CORSO DI LAUREA IN FISICA

STATI COERENTI GENERALIZZATI DI ALGEBRE DI LIE SEMISEMPLICI

Relatore:
Chiar.mo Prof. B. Bertotti
Bruno Bertotti

Relatore Esterno:
Dott. G. D' Ariano
Giacomo D'Ariano

Tesi di:
Antonio Cavalli

Anno Accademico 1983/84

INTRODUZIONE

La corrispondenza tra Dinamica Classica e Dinamica Quantistica di un sistema fisico può essere ottenuta in modo diretto mettendo in relazione gli stati classici del sistema con un insieme di vettori nello spazio di Hilbert associato al sistema stesso . A tal fine occorre selezionare un insieme completo di vettori ognuno dei quali é etichettato da un punto nello spazio delle fasi e tali che i valori medi su questi vettori degli operatori associati alle osservabili fisiche sono esattamente le funzioni del punto nello spazio delle fasi che descrivono le grandezze fisiche classiche . Si può inoltre richiedere che l'evoluto temporale quantistico del sistema , nello schema di Schrödinger , appartenga ad ogni istante a tale insieme di stati ; in tal modo si stabilisce una corrispondenza tra l'evoluzione dinamica quantistica ed una traiettoria nello spazio delle fasi . tale traiettoria risulta essere esattamente quella classica regolata dalle equazioni di Hamilton .

Gli stati quantistici così definiti sono generalmente detti "stati coerenti" del sistema .

Schrödinger costruí esplicitamente gli stati coerenti dell'oscillatore armonico . Tali stati non sono autostati né della posizione né dell'impulso , ma sono etichettati dalle rispettive variabili canoniche q e p e seguono nell'evoluzione dinamica la traiettoria classica come pacchetto d'onde quantistico di indeterminazione minima ($\Delta p \Delta q = \hbar/2$) . La via seguita Schrödinger per la costruzione degli stati coerenti non é peró direttamente utilizzabile per un sistema fisico diverso dall'oscillatore armonico .

La generalizzazione ad un sistema arbitrario si attua per una via di natura strettamente algebrica . Gli stati coerenti generalizzati sono infatti associati alle rappresentazioni unitarie irriducibili di un gruppo di Lie G di automorfismi della varietá dello spazio delle fasi . Il gruppo G agisce transitivamente sulla varietá , la quale viene pertanto identificata con lo spazio omogeneo quoziente G/S , essendo S il sottogruppo di stabilitá di un punto origine nello spazio delle fasi stesso .

La costruzione degli stati coerenti si attua quindi come segue : scelto un vettore $|\Omega\rangle$ nello spazio di Hilbert del sistema , sul quale il gruppo G é rappresentato unitariamente ed irriducibilmente , poniamo tale vettore in corrispondenza con l'origine scelta nello spazio delle fasi ; l'insieme degli stati coerenti é ottenuto come orbita del vettore $|\Omega\rangle$ nello spazio di Hilbert sotto l'azione del gruppo G .

In questo lavoro di tesi abbiamo individuato la via per la costruzione esplicita dell'orbita suddetta nel caso di gruppi di Lie semisemplici compatti . A tal fine risulta conveniente

considerare la complessificazione G_c del gruppo G e sceglie-re come vettore origine il vettore di peso massimo della rap-presentazione irriducibile .
La decomposizione di Gauss degli elementi del gruppo consente di fattorizzare esplicitamente i parametri descriventi l'orbi-ta del gruppo e quindi lo spazio omogeneo G_c/S_c con S_c sot-togruppo di stabilitá del vettore di peso massimo ; tale spa-zio omogeneo coincide con lo spazio G/S . Attraverso tale co-struzione abbiamo potuto individuare esplicitamente la strut-tura metrica (Kähleriana) della varietá dello spazio omogeneo G/S che entra esplicitamente nelle equazioni di Hamilton del sistema identificando lo spazio omogeneo con lo spazio delle fasi . Lo spazio delle funzioni intere a quadrato sommabile sullo spazio quoziente é identificato conseguentemente con lo spazio di Hilbert del sistema .
Abbiamo esemplificato la costruzione su esposta per le algebre di Lie semplici $A_n = SL(n+1,C)$ nel caso della rappresentazione fondamentale e per ogni rappresentazione irriducibile dell'al-gebra SU(2) dei momenti angolari . (Per completezza abbiamo anche dato la costruzione esplicita nel caso dell'algebra SU(1,1) come esempio di algebra non compatta rappresentata unitariamente su uno spazio di Hilbert di dimensione infinita).
Una parte di questo lavoro di tesi é stata inoltre dedicata all'evoluzione dinamica del sistema attuando la corrisponden-za tra la descrizione classica e quella quantistica attraver-

so il "path integral" sugli stati coerenti ; in questo contesto abbiamo selezionato le classi di Hamiltoniane che conservano la coerenza nell'evoluzione quantistica .

Le tecniche adottate in questo lavoro di tesi sono generalizzabili al caso di algebre di Lie di dimensione infinita . Queste ultime hanno un particolare interesse in quanto é stato recentemente mostrato (*) che gli stati coerenti di tali algebre sono identificabili con gli spazi delle soluzioni delle equazioni non lineari di tipo solitonico nello schema bilineare di Hirota . Il gruppo di Lie di tali algebre é il gruppo di Backlünd delle equazioni non lineari che connette diverse soluzioni . In tal modo l'evoluzione non lineare delle soluzioni é messa in corrispondenza con l'evoluzione di un sistema quantistico con infiniti gradi di libertà .

La tesi é corredata ,al termine, da una bibliografia dei testi di maggiore interesse consultati , ai quali si fa riferimento , nel corso dei capitoli , mediante un numero d'ordine tra parentesi quadre .
Per quanto riguarda i concetti di geometria differenziale e di teoria strutturale e delle rappresentazioni di algebre

(*):G.D'Ariano , M.Rasetti ,PHYS.LETT.A (in corso di stampa).

e gruppi di Lie , utilizzati nel corso della tesi , sono esclusivamente enunciati le definizioni e i teoremi utilizzati , rimandando di volta in volta , ai testi consultati per la dimostrazione dei teoremi stessi .

Ringraziamo il Prof.M.Rasetti del Dipartimento di Fisica del Politecnico di Torino per i preziosi suggerimenti e chiarimenti che hanno arricchito il presente lavoro di tesi.

CAPITOLO I:
STATI COERENTI DELL'OSCILLATORE ARMONICO

§(I,1):"Stati di Glauber"

Storicamente l'idea degli stati coerenti nacque dall'esigenza di costruire, nell'apparato della Meccanica Quantistica, degli oggetti che avessero un comportamento che fosse il piu' vicino possibile a quello classico, cioe' di trovare, nello spazio degli stati del sistema, dei vettori particolari per i quali fossero evidenti le analogie con gli stati fisici della Meccanica Classica.

L'idea di Schrödinger [1] (il primo che diede l'espressione esplicita per tali stati) era di cercare funzioni d'onda per le quali fosse minimizzata l'indeterminazione quantistica, ovvero la relazione di indeterminazione di Heisenberg, relativa alla misura simultanea delle grandezze posizione ed impulso:

$$\Delta p \, \Delta q \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (I,1,1)$$

fosse soddisfatta con il segno di uguaglianza. Per realizzare la corrispondenza con stati classici occorreva inoltre che il pacchetto d'onda di minima indeterminazione fosse centrato attorno al punto nello spazio delle fasi che seguiva la traiettoria classica della particella.

Partendo da tali presupposti Schrödinger risolse il problema nel caso dell'oscillatore armonico, realizzando pacchetti d'onda, che seguivano l'evoluzione dinamica classica (rotazione con velocita' angolare ω nel piano (q,p)), senza sparpagliarsi, ovvero mantenendo minima l'indeterminazione posizione-impulso.

Schrödinger tento' di estendere questo procedimento ad altri tipi di hamiltoniana, ma senza successo; come si vedra' in seguito la possibilita' di definire stati coerenti per un generico sistema fisico si attua per una via strettamente algebrica.

Lo studio degli stati coerenti fu ripreso in seguito solamente intorno agli anni '60, nell'ambito dell'Ottica Quantistica; il nome stesso di questi stati fu introdotto in tale contesto in relazione al fatto che essi sono adeguati per descrivere correttamente la radiazione coerente del laser.

Il contributo maggiore alla trattazione piu' approfondita degli stati coerenti dell'oscillatore armonico e delle loro proprieta' piu' generali e' dovuto a R.Glauber [2] ; per questo motivo tali stati sono detti anche "stati di Glauber".

Il problema chiave dell'Ottica Quantistica era quello di descrivere adeguatamente un sistema con un elevato numero di fotoni, mantenedo, nell'ambito di una trattazione prettamente quantistica, una stretta analogia con il comportamento classico.

La teoria dell'Elettrodinamica Quantistica non consente di risolvere questo problema: essa infatti e' una teoria perturbativa che consente di trattare solamente fenomeni che comportino la presenza di pochi fotoni.

L'approccio corretto alla risoluzione del problema fu proprio quello di Glauber, che porto' alla definizione degli stati coerenti.

Affrontiamo ora in dettaglio l'analisi degli stati coerenti e di alcune delle loro proprieta' piu' interessanti.
Consideriamo un oscillatore armonico unidimensionale la cui hamiltoniana e' :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{q}^2 \qquad (I,1,2)$$

con la sostituzione

$$\hat{q} = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2} (\hat{a} + \hat{a}^+) \qquad \hat{p} = \frac{1}{i}\left(\frac{\hbar m \omega}{2}\right)^{1/2} (\hat{a} - \hat{a}^+) \qquad (I,1,3)$$

possiamo studiare il sistema nel formalismo degli autostati $|n\rangle$ dell'operatore numero $\hat{n} = \hat{a}^+\hat{a}$; in tale spazio (detto di Fock) l'hamiltoniana e' data dall'espressione :

$$\begin{cases} \hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right) \\ \hat{n} = \hat{a}^+\hat{a} \end{cases} \qquad (I,1,4)$$

(In seguito si riferira' l'energia allo stato di vuoto trascurando quindi il termine $(\frac{1}{2}\hbar\omega)$).
Nell'ambito dell'Ottica Quantistica lo spazio di Fock traduce gli stati di vibrazione della radiazione elettromagnetica; gli operatori $\hat{q}$ e $\hat{p}$ sono correlati con gli operatori potenziale vettore $\underline{A}$, nel gauge di radiazione, e campo elettrico $\underline{E}$.
In tale contesto gli stati di Glauber servono per descrivere stati del sistema in cui il numero di fotoni non e' precisato ma la cui fase e' de-

finita;essi saranno quindi rappresentati da una sovrapposizione di autostati di $\hat{n}$.

Piu' precisamente definiamo :

$$|z\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle \qquad z \in \mathbb{C} \tag{I,1,5}$$

etichettiamo in questo modo ogni vettore del set con un numero complesso;il coefficiente numerico $e^{-\frac{1}{2}|z|^2}$ assicura la corretta normalizzazione di questi stati.

Verifichiamo le proprieta' richieste per gli stati coerenti.

Il calcolo esplicito dell'indeterminazione delle misure delle grandezze associate a $\hat{q}$ e $\hat{p}$ si svolge come segue :

$$\Delta q = (\langle \hat{q}^2 \rangle - \langle \hat{q} \rangle^2)^{1/2} \qquad \Delta p = (\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle p \rangle^2)^{1/2} \tag{I,1,6}$$

$$\langle \hat{q} \rangle = \langle z | \hat{q} | z \rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2} \langle z | \hat{a} + \hat{a}^+ | z \rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2} (z^* + z) = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2} 2\,Re(z)$$

analogamente

$$\langle \hat{p} \rangle = \left(\frac{\hbar m\omega}{2}\right) 2\, Im(z)$$

dove si e' fatto uso delle espressioni (I,1,3) per gli operatori $\hat{q}$ e $\hat{p}$ e delle proprieta' (che verificheremo successivamente) che gli stati $|z\rangle$ sono autostati dell'operatore $\hat{a}$ di di distruzione con autovalori z:

$$\hat{a}|z\rangle = z|z\rangle \qquad \langle z| \hat{a}^+ = z^* \langle Q|$$

allo stesso modo :

$$\langle \hat{q}^2 \rangle = \langle z | \hat{q}^2 | z \rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right) \langle z | (\hat{a}^+ + \hat{a})^2 | z \rangle =$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right) \langle z | \hat{a}^{+2} + \hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^2 | z \rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right) \langle z | \hat{a}^{+2} + 2\hat{a}^+\hat{a} + \hat{I} + \hat{a} | z \rangle =$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right) (z^{*2} + 2|z|^2 + z^2 + 1) = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right) \left\{ 4[Re(z)]^2 + 1 \right\}$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \left(\frac{\hbar m\omega}{2}\right) \left\{ 4[Im(z)]^2 + 1 \right\}$$

sostituendo nella (I,1,6)

$$\Delta q = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2}\left\{4\left[Re(z)\right]^2+1-4\left[Re(z)\right]^2\right\}^{1/2} = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2}$$

$$\Delta p = \left(\frac{\hbar m\omega}{2}\right)^{1/2}\left\{4\left[Im(z)\right]^2+1-4\left[Im(z)\right]^2\right\}^{1/2} = \left(\frac{\hbar m\omega}{2}\right)^{1/2}$$

otteniamo per il principio di indeterminazione di Heisenberg

$$\Delta p\,\Delta q = \frac{\hbar}{2}$$

cioe' l'incertezza quantistica viene minimizzata per qualsiasi stato coerente.

Per quanto riguarda il comportamento "classico" osserviamo che facendo evolvere lo stato coerente con l'hamiltoniana (I,1,2) otteniamo sempre uno stato coerente,e il punto rappresentativo del sistema sul piano complesso ruota intorno all'origine con velocita' angolare ω .Infatti

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|z\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\, e^{-\frac{1}{2}|z|^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{(m!)^{1/2}}|m\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{(m!)^{1/2}}\,e^{-i\omega\hat{m}t}|m\rangle =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|z\,e^{-i\omega t}|^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(z\,e^{-i\omega t}\right)^m}{(m!)^{-1/2}}|m\rangle = |z'(t)\rangle \qquad \text{(I.1,7)}$$

dove si e' posto

$$z'(t) = z\,e^{-i\omega t}$$

Possiamo quindi interpretare il piano complesso come lo spazio delle fasi e ritrovare cosi' l'evoluzione classica del punto rappresentativo del sistema in tale spazio;piu' precisamente il modulo e la fase del numero complesso z rappresentano rispettivamente l'elongazione e la fase del moto dell'oscillatore.Osserviamo inoltre che nel piano complesso gli stati $|n\rangle$ (autostati dell'energia) sono rappresentati da cerchi centrati nell'origine con fase completamente indeterminata.

§ (I,2) : "Proprieta' degli Stati di Glauber"

Esaminiamo in questo paragrafo le proprieta' interessanti degli stati di Glauber : alcune di esse sono verificate anche dagli stati generalizzati che definiremo in seguito,altre sono caratteristiche dei soli stati coerenti dell'oscillatore armonico.Riportiamo per completezza anche alcune proprieta' gia' citate precedentemente.

(i) Gli stati di Glauber sono autostati dell'operatore $\hat{a}$ di distruzione

$$\hat{a}|z\rangle = z|z\rangle \qquad (I,2,1)$$

Infatti

$$\hat{a}|z\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n!)^{1/2}}\hat{a}|n\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n!)^{1/2}}(n)^{1/2}|n-1\rangle =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|z|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{(n!)^{1/2}}|n\rangle = z|z\rangle$$

dove si e' utilizzata la rappresentazione dell'operatore $\hat{a}$ sullo spazio di Fock

$$\begin{cases} \hat{a}|n\rangle = (n)^{1/2}|n-1\rangle & n\neq 0 \\ \hat{a}|0\rangle = 0 \end{cases}$$

(ii) Sono gli stati corrispondenti alla minima indeterminazione del prodotto $\Delta q \Delta p$;questa proprieta' e' gia' stata verificata precedentemente.

(iii) Una peculiarita' degli stati $|z\rangle$ e' la non-ortogonalita'.Si dimostra infatti la relazione :

$$\begin{cases} \langle z|w\rangle = e^{-\frac{1}{2}(|z|^2+|w|^2)} \sum_{m,n} \frac{(z^*)^m (w)^n}{(m!)^{\frac{1}{2}}(n!)^{\frac{1}{2}}} \langle n|m\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2-\frac{1}{2}|w|^2+z^*w} \\ |\langle z|w\rangle|^2 = e^{-|z-w|} \end{cases} \qquad (I,2,2)$$

La sovrapposizione tra due stati coerenti e' tanto minore quanto piu' sono distanti nel piano complesso i loro punti rappresentativi. Vedremo in seguito come la difficolta' connessa alla non-ortogonalita' possa essere convenientemente superata. La non-ortogonalita' e' connessa con il fatto che il set degli stati coerenti ha la potenza del continuo ($z \in C$) mentre lo spazio di Fock e' separabile, e gli autostati $|n\rangle$ dell'operatore numero ne costituiscono un sistema ortonormale completo.

(iv) Il set e' comunque completo, anzi over-completo (ovvero se ne puo' estrarre un set numerabile completo).

Per dimostrare la completezza bastera' far vedere che e' possibile risolvere l'identita' in termini di stati coerenti :

$$\hat{I} = \frac{1}{\pi} \int d^2z \; |z\rangle\langle z| \qquad (I,2,3.a)$$

$$d^2z = d\mathrm{Re}(z)\, d\mathrm{Im}(z) \qquad (I,2,3.b)$$

Basta dimostrare che l'operatore $\hat{I}$ sopra dato e' l'identita' sugli stati $|n\rangle$ del set ortonormale completo.

Sfruttando le definizioni (I,1,5) e (I,2,3 .a) possiamo scrivere :

$$\hat{I}|m\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2z \; |z\rangle\langle z|m\rangle = \cancel{\frac{1}{\pi} \int d^2z \; e^{-\frac{1}{2}|z|^2}}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int d^2z \; e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k!)^{\frac{1}{2}}} |k\rangle \, e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \frac{(z^*)^m}{(m!)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!\,m!)^{\frac{1}{2}}} |k\rangle \int d^2z \; e^{-\frac{1}{2}|z|^2} z^k (z^*)^m$$

[La possibilita' di commutare i segni di $\int$ e di $\sum$ e' assicurata dai coefficcienti della serie che la rendono assolutamente convergente in tutto il piano complesso].

Calcoliamo l'integrale in coordinate polari operando la sostituzione $z = \rho e^{i\varphi}$ $\quad d^2z = \rho d\rho d\varphi$

$$\int d^2z\, e^{-|z|^2} z^k (z^*)^m = \int_0^\infty d\rho\rho\, \rho^{k+m} \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{i\varphi(k-m)} =$$

$$= 2\pi\, \delta_{k,n} \int_0^\infty d\rho\, \rho^{2k+1} e^{-\rho^2} = \pi\, \delta_{k,m} \int_0^\infty dt\, e^{-t} t^m = \pi\, \delta_{k,m}\, m!$$

Dove si e' operata la sostituzione di variabile e si e' utilizzata la proprieta' della funzione $\Gamma(z)$:

$$\Gamma(m+1) = \int_0^\infty dt\, e^{-t} t^m = m!$$

Sostituendo il valore dell'integrale si ottiene

$$I|m\rangle = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!m!)^{1/2}} |k\rangle\, \pi\, \delta_{k,m}\, m! = |m\rangle$$

Per quanto riguarda la over-completezza del set sono stati studiati [[3] , [4]] sottoinsiemi numerabili di stati coerenti ottenuti reticolando il piano complesso e scegliendo un vettore per ogni "cella" cosi' ottenuta ; si ottiene in questo modo anche una corrispondente partizione dello spazio delle fasi (q,p).Si dimostra in tale caso che le proprieta' di completezza del sottoinsieme cosi' ottenuto dipendono dalle dimensioni della cella ; riferendosi allo spazio delle fasi ed indicando con s l'area della cella si ottengono i seguenti casi :

(a) s > h : il set di stati non e' completo (e' possibile trovare un vettore non nullo ortogonale ad ogni vettore del sottoinsieme).

(b) $s < h$: il set e' ancora over-completo

(c) $s = h$: il set ottenuto e' completo (piu' precisamente vi e' un solo vettore dipendente linearmente dagli altri); in tale caso il reticolo viene chiamato "reticolo di Von Neumann". Fu infatti quest'ultimo [4] ad affermare per primo la completezza di questo particolare sottoinsieme di stati coerenti, senza peraltro darne una dimostrazione completa.

Grazie alla risoluzione dell'identita' (I,2,3.a) e' possibile scrivere per ogni stato coerente :

$$|w\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2z \; |z\rangle\langle z|w\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2z \; e^{-\frac{1}{2}|z|^2-\frac{1}{2}|w|^2+z^*w} \; |z\rangle$$

oppure

$$|w\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2z \; k(z^*,w)\,|z\rangle \qquad (I,2,4)$$

dove si e' introdotto il "kernel auto-riproducentesi" :

$$k(z^*,w) = e^{-\frac{1}{2}|z|^2-\frac{1}{2}|w|^2+z^*w} \qquad (I,2,5)$$

cosi' chiamato per la proprieta' :

$$k(z^*,w) = \frac{1}{\pi}\int d^2v \; k(z^*,v)\,k(v^*,w)$$

Scrivendo nella (I,2,4) gli stati $|w\rangle$ e $|z\rangle$ in termini di autostati di $\hat{n}$ e sfruttando il fatto che il set di tali stati $|n\rangle$ e' ortonormale e completo si puo' dimostrare facilmente che vale la relazione :

$$w^m = \frac{1}{\pi}\int e^{-|z|^2+z^*w} \; z^m \, d^2z \qquad (I,2,6)$$

Una relazione analoga vale per ogni funzione intera $f(z)$.

(v) Con queste premesse e' possibile dare una rappresentazione dello spazio di Fock in termini di uno spazio di Hilbert di funzioni intere nel quale un sistema ortonormale completo di autostati dell'hamiltoniana dell'oscillatore armonico e' costituito da semplici monomi, e non dai complicati polinomi di Hermite.

Tale problema e' stato affrontato in forma piu' generale da Bargmann [5] e Schweber [6] ; ci limiteremo a studiare il caso particolare dell'oscillatore armonico unidimensionale.

Grazie alla risoluzione dell'identita' possiamo associare ad ogni vettore $|f\rangle$ nello spazio di Fock una funzione intera $f(z)$.

Sia :

$$\begin{cases} |f\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} c_m |m\rangle \\ c_m = \langle m|f\rangle \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |c_m|^2 < +\infty \end{cases}$$

Sfruttando la (I,2,3 .a) si puo' esprimere in termini di stati coerenti la $|f\rangle$

$$|f\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2z\, |z\rangle\langle z|f\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2z\, |z\rangle \sum_{m=0}^{\infty} c_m \langle z|m\rangle =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int d^2z\, |z\rangle \sum_{m=0}^{\infty} c_m \frac{z_n^*}{m!} e^{-\frac{1}{2}|z|^2} = \frac{1}{\pi}\int d^2z\, e^{-\frac{1}{2}|z|^2} f(z^*)|z\rangle \qquad (I,2,7)$$

dove si e' usata la proprieta' :

$$\langle z|m\rangle = \langle m|z\rangle^* = e^{-\frac{1}{2}|z|^2}\left(\frac{z^m}{(m!)^{1/2}}\right)^*$$

e dove si e' definita la funzione intera :

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \frac{z^m}{(m!)^{1/2}} \qquad (I,2,8)$$

(la convergenza della serie e' assicurata dal fatto che $\sum_{m=0}^{\infty} |c_m|^2 < +\infty$ e quindi i coefficienti c_n sono limitati).

In particolare le funzioni intere corrispondenti agli autostati $|n\rangle$ dell'operatore numero sono i monomi:

$$n(z) = \frac{z^n}{(n!)^{1/2}}$$

Osserviamo che nell'espressione (I,2,7) che definisce $|f\rangle$ in termini di stati coerenti non compare $f(z)$ ma $f(z^*)$, funzione della variabile z^*.

Per costruire lo spazio di Hilbert utilizziamo pero' la (I,2,8) cosi' da ottenere uno spazio di funzioni analitiche.

Resta da mostrare che e' possibile definire un prodotto scalare nel nuovo spazio (di Fock-Bargmann) riconducendosi all'originario prodotto scalare nello spazio di Fock. Consideriamo quindi due funzioni intere $f(z)$, $g(z)$ ed i corrispondenti vettori :

$$|f\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2z\, e^{-\frac{1}{2}|z|^2} f(z^*)\,|z\rangle \qquad |g\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2z\, e^{-\frac{1}{2}|z|^2} g(z^*)\,|z\rangle$$

il cui prodotto scalare e' dato da :

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{\pi^2}\iint d^2z\, d^2w\, \langle z|w\rangle\, e^{-\frac{1}{2}|z|^2-\frac{1}{2}|w|^2} f^*(z^*)\, g(w^*) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\iint d^2z\, d^2w\, e^{-|z|^2-|w|^2+z^*w} f^*(z^*)\, g(w^*)$$

in questo passaggio si e' utilizzata l'espressione (I,2,2) del prodotto scalare di due stati coerenti ; sviluppiamo ora la funzione $f^*(z^*)$ in serie di potenze :

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{\pi^2}\iint d^2z\, d^2w\, e^{-|z|^2-|w|^2+z^*w} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(z)^n}{(n!)^{1/2}}\, g(z^*)$$

Integriamo ora in d^2z sfruttando la (I,2,6)

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2w\, e^{-|w|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(n!)^{1/2}}\, w^n g(w^*) = \frac{1}{\pi}\int d^2w\, e^{-|w|^2} f^*(w^*)\, g(w^*)$$

operando quindi il cambiamento di variabile $w \longrightarrow w^*$, ed essendo $d^2w = d\mathrm{Re}(w)\, d\mathrm{Im}(w) = d^2w^*$ possiamo quindi scrivere :

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2w \, e^{-|w|^2} f^*(w)\, g(w)$$

Il prodotto scalare nello spazio di Fock-Bargmann delle funzioni intere viene pertanto definito da :

$$(f(z), g(z)) = \int d\mu(z)\, f^*(z)\, g(z) \qquad \text{(I,2,9.a)}$$

$$d\mu(z) = \frac{1}{\pi} e^{-|z|^2} d\mathrm{Re}(z)\, d\mathrm{Im}(z) \qquad \text{(I,2,9.b)}$$

che e' ovviamente un prodotto scalare essendo coincidente con quello corrispondente nello spazio di Fock.

(vi) Il set degli stati coerenti e' adatto per descrivere in modo semplice gli operatori. Infatti un qualsiasi operatore e' univocamente determinato, tramite gli stati coerenti, da una funzione di due variabili. Utilizzando la risoluzione dell'identita' (I,2, 3.a) si ottiene per un generico operatore $\hat{A}$

$$\hat{A} = \frac{1}{\pi^2} \iint d^2z\, d^2w\, |z\rangle\langle z|\hat{A}|w\rangle\langle w| =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \iint d^2z\, d^2w\, |z\rangle\langle w|\; A(z^*, w)$$

dove si e' introdotta la funzione :

$$A(z^*, w) = \langle z|\hat{A}|w\rangle$$

(vii) Grazie alla stretta relazione esistente tra gli stati coerenti e lo spazio delle fasi essi possono essere utilizzati convenientemente per una formulazione della Meccanica Quantistica con il cosiddetto "path integral method" [6] .

Secondo la formulazione originale di Feynman [7] viene fornito un metodo per il calcolo del propagatore

$\langle q''t''|q't'\rangle$ (prodotti scalari di due stati del sistema espressi nella rappresentazione delle posizioni). Il procedimento e' quello di associare ad ogni curva nello spazio delle configurazioni (q,t) congiungente i due punti (q',t') e (q'',t''), un numero complesso

$$\phi(q(t)) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''} L(q(t),\dot{q}(t))\,dt\right\}$$

(dove L e' la lagrangiana classica del sistema), e di "sommare" su tutti i possibili cammini

$$\langle q'',t''|q',t'\rangle = \int\cdots\int \mathcal{D}[q(t)]\,\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''} L(q(t),\dot{q}(t))\,dt\right\}$$

che bis. c'è di sommare su tutti i cammini se quello effettivamente seguito dal sist è uno solo?

Quest'ultima scrittura e' puramente formale, dovendosi precisare, per darle senso, una metrica nello "spazio dei cammini".

Credo sì. Tutto il discorso formale.

L'interpretazione data da Feynman era questa :

(a) si divide l'intervallo $[t',t'']$ in N parti uguali di ampiezza $\varepsilon = (1/N)(t''-t')$

(b) si individua un possibile cammino tra (q',t') e (q'',t'') con punti relativi ai vari istanti intermedi :

$$q_k = q(t_k) \qquad t'=t_0<t_1<\ldots\ldots<t_N=t''$$

(c) si assume che, negli intervallini $((q_k,t_k);(q_{k+1},t_{k+1}))$ l'integrale debba essere valutato sul cammino classico,

detto male: viene infatti da chiedersi quale sia, in questo contesto, il "cammino classico"!

ottenendo quindi :

$$\phi(q_1 .. q_N) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=0}^{N-1}\int_{q_k t_k}^{q_{k+1},t} L\,dt\right\} = \prod_{k=1}^{N-1}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S(q_k;q_{k+1})\right\}$$

essendo $S(q_k,q_{k+1})$ l'azione classica sul cammino considerato.

(d) si con siderano poi le possibili partizioni del tratto $(q',t'),(q'',t'')$ integrando nello spazio delle posizioni su ognuna delle variabili intermedie q_i introdotte, e si calcola infine il limite per $N \dashrightarrow \infty$, mantenendo la condizione $N\varepsilon = t''-t'$

$$\langle q''_i t'' | q'_i t' \rangle = \lim_{N\to\infty} \int \cdots \int \prod_{k=1}^{N-1} dq_k \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S(q_k, q_{k-1})\right\} \qquad (I,2,18)$$

Il procedimento di Feynman mostra dei problemi quando si voglia effettivamente calcolare l'espressione (I,2,18), dovuti essenzialmente alla presenza di integrali del tipo $\int e^{ix^2}\,dx$ non definiti.

Tali problemi vengono eliminati [8] se si considerano come variabili descriventi il sistema :

$$z = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2}(q+ip) \qquad z^* = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2}(q-ip)$$

anziche' la posizione e l'impulso, e se si esprimono gli stati del sistema con gli autostati dei corrispndenti operatori $\hat{a},\hat{a}^+$; tali stati sono esattamente gli stati coerenti (I,1,5) precedentemente definiti.

Si puo' allora esprimere il prodotto scalare tra due stati coerenti con un "path integral", ripetendo il procedimento indicato da Feynman, ma considerando cammini nello spazio delle fasi. Si ottiene quindi :

$$\langle a''_i t'' | a'_i t' \rangle = \int \cdots \int \mathcal{D}(z(t)) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{z't'}^{z''t''} L[z(t), z^*(t); \dot{z}(t), \dot{z}^*(t)]\,dt\right\}$$

dove abbiamo utilizzato le notazioni :

$$\mathcal{D}(z(t)) = \lim_{N\to\infty} \prod_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\pi} d^2 z_k$$

$$L[z(t), z^*(t), \dot{z}(t), \dot{z}^*(t)] = \frac{i}{2}\left[\dot{z}(t)\, z^*(t) - z(t)\,\dot{z}^*(t)\right] - H[z(t), z^*(t)]$$

che coincide con la lagrangiana classica, a meno di una derivata totale rispetto al tempo che e' irrilevante per le equazioni del moto.

Con questo metodo (chiamato anche principio di Feynman) e' possibile formulare la meccanica quantistica con i soli concetti classici di spazio delle fasi e di azione, ottenendo le corrette regole di commutazione per gli operatori $\hat{a}$ ed $\hat{a}^+$ definiti nella rappresentazione degli stati coerenti da :

$$\langle z'', t'' \,|\, \hat{a}(t) \,|\, z' t' \rangle = \int \cdots \int \mathcal{D}(z(t))\, z(t) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{z' t'}^{z'' t''} L \, dt \right\}$$

§ (I,3): "Evoluzione Dinamica degli Stati di Glauber"

Abbiamo studiato nel precedente paragrafo alcune proprieta' generali del set degli stati coerenti. Ci soffermiamo ora sulle proprieta' dinamiche degli stessi.

Parlando delle proprieta' "classiche" degli stati coerenti abbiamo mostrato nel primo paragrafo che l'hamiltoniana (I,1,4) dell'oscillatore armonico conserva le proprieta' di coerenza, causando semplicemente un "moto" del punto rappresentativo z nel piano complesso del tipo:

$$z(t) = e^{-i\omega t} z_0$$

dove z_0 e' il punto rappresentativo dello stato iniziale.
Ci chiediamo ora se e' possibile trovare una classe piu' ampia di hamiltoniane che conservi la coerenza. Il problema generale viene risolto su basi puramente algebriche e la trattazione piu' completa verra' pertanto fatta nei successivi capitoli (§II.4).
In questo paragrafo ci limitiamo a studiare il caso dell'oscillatore armonico forzato ed a mostrare che anch'esso conserva la coerenza.
Consideriamo dunque l'hamiltoniana :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{q}^2 + \hat{q} f_q(t) + \hat{p} f_p(t) \qquad (I,3,1)$$

(Il termine dipendente dal momento generalizza la parte forzante, ma come risultera' in seguito e' questa la piu' generale hamiltoniana che conserva la coerenza).

Introducendo gli operatori $\hat{a}$ e $\hat{a}^+$ di distruzione e di creazione ricavati dalla (I,1,3) si ottiene:

$$\hat{H} = \hbar\omega a^+ a + \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{1}{m\omega}\right)^{\frac{1}{2}} f_q(t) - i(m\omega)^{\frac{1}{2}} f_p(t) \right] a + \\ + \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{1}{m\omega}\right)^{\frac{1}{2}} f_q(t) - i(m\omega)^{\frac{1}{2}} f_p(t) \right] a^+ = \\ = \hbar\omega a^+ a + \gamma^*(t)\, a + \gamma(t)\, a^+ \qquad (I,3,2)$$

Consideraiamo una soluzione di tentativo dell'equazione di Schrödinger relativa all'hamiltoniana (I,3,1) del tipo :

$$|\psi(t)\rangle = |z(t)\rangle e^{i\phi(t)} \qquad (I,3,3)$$

La condizione che tale soluzione si mantenga uno stato coerente e' allora semplicemente che $\phi(t)$ si mantenga reale; si tratta quindi di trovare un'equazione differenziale per la $\phi(t)$.

Proiettando l'equazione di Schrödinger su un generico stato coerente $\langle w|$ si ottiene :

$$\langle w| i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left(|z(t)\rangle e^{i\phi(t)}\right) = \langle w| \hat{H}(t) | z(t)\rangle e^{i\phi(t)} \qquad (I,3,4)$$

Per trasformare il primo membro della (I,3,4) utilizziamo l'espressione (I,2,2) del prodotto scalare tra due stati coerenti arbitrari

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle w|z(t)\rangle = \langle w|z(t)\rangle \left(-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z|^2 + w^*\frac{dz}{dt}\right)$$

Per quanto riguarda il secondo membro dell'equazione si sfrutta la proprieta' (I,2,1) che gli stati di Glauber sono autostati di $\hat{a}$.

$$\langle w| \hat{H}(t) z(t)\rangle = \left(\hbar\omega w^* z(t) + \gamma(t) w^* + \gamma^*(t) z(t)\right)\langle w|z(t)\rangle$$

Sostituendo e dividendo per $\langle w|z(t)\rangle e^{i\phi(t)} \neq 0$

Essendo lo stato $|w\rangle$ totalmente generico questa e' un'equazione in w^* : devo quindi eguagliare i coefficienti di w^* e di 1;ottengo quindi la seguente coppia di equazioni :

$$\frac{d\dot{\phi}}{dt} = -\frac{i}{2}\frac{d}{dt}|z(t)|^2 - \frac{1}{\hbar}\gamma^*(t)\, z(t) \qquad (I,3,5.a)$$

$$\frac{dz}{dt} = -i\omega z(t) - \frac{i}{\hbar}\gamma(t) \qquad (I,3,5.b)$$

Per determinare l'evoluzione temporale della fase $\phi(t)$ devo allora valutare :

$$\frac{d}{dt}|z|^2 = \frac{d}{dt}\left(z^* z\right) = z^*\frac{dz}{dt} + z\left(\frac{dz}{dt}\right)^* = 2\,Re\left(z^*\frac{dz}{dt}\right)$$

dalla seconda equazione ottengo quindi :

$$\frac{d}{dt}|z|^2 = 2\,Re\left[\left(-i\omega z^*(t) z(t) - \frac{i}{\hbar} z^*(t)\gamma(t) - \frac{2}{\hbar} Re\left[-i z^*(t)\gamma(t)\right]\right.$$

sostituendo nella (I,3,5..a)

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{i}{2}\,\frac{2}{\hbar}\,Re\left[-i z^*(t)\gamma(t)\right] - \frac{i}{\hbar}\gamma^*(t) z(t) =$$

$$= -\frac{1}{\hbar}\left\{ i\ Im\left[\left(z^*(t)\gamma(t)\right] + \gamma^*(t) z(t)\right.\right\} =$$

$$= -\frac{1}{\hbar}\left\{ -i\ Im\left[\gamma^*(t) z(t)\right] + \gamma^*(t) z(t)\right\} = -\frac{1}{\hbar} Re\left[\gamma^*(t) z(t)\right]$$

questa equazione assicura che la $\phi(t)$ resti reale nel tempo e questa condizione consente di affermare che lo stato rimane coerente nel corso della sua evoluzione temporale.In particolare questo vale per l'oscillatore forzato ($f_p(t)=0$);l'importanza di questo risultato sta nel fatto che tale caso e' perfettamente analogo a quello di un campo elettromagnetico in presenza di una corrente [9] .

Utilizzando un formalismo algebrico e' possibile mostrare che l'evoluzione temporale del punto rappresentativo nel piano complesso dello stato coerente e' esattamente fornito dalle equazioni di Hamilton della Meccanica Classica, con l'interpretazione del piano complesso come spazio delle fasi.

Mostriamo questa proprieta' nel caso di un oscillatore armonico forzato inizialmente fermo confrontando il problema classico con quello quantistico.

(a) L'equazione classica dell'oscillatore armonico forzato e' :

$$\ddot{q} + \omega^2 q = f(t)$$

che si ricava dall'hamiltoniana :

$$H_f = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q - mq\,f(t) \qquad (I,3,6)$$

supponenedo l'oscillatore fermo nella posizione di equilibrio al tempo $t=0$ le condizioni iniziali sono

$$q(0) = 0 \qquad \dot{q}(0) = 0 \qquad (I,3,7)$$

La soluzione del problema di Cauchy e' allora, come e' facilmente verificabile :

$$q(t) = \int_0^{+\infty} d\tau\, \frac{1}{\omega}\, \vartheta(t-\tau) \sin\omega\,(t-\tau)\, f(\tau)$$

(b) Per evidenziare l'analogia con il caso quantistico e' conveniente adottare l'apparato dello spazio delle fasi esprimendolo pero' in termini della variabile complessa z definita dal corrispondente operatore $\hat{a}$ della (I,1,3) :

$$z(t) = \left(\frac{m}{2\hbar\omega}\right)^{1/2} \left[\omega\, q(t) + \frac{i}{m}\, p(t)\right]$$

Il valore dell'impulso $p(t)$ e' dato dalla prima delle equazioni di Hamilton ($\dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial t}$) che fornisce :

$$p(t) = m\dot{q}(t) = m\,\frac{d}{dt}\int_0^{\infty} d\tau\, \frac{1}{\omega}\, \vartheta(t-\tau) \sin\omega\,(t-\tau)\, f(\tau) =$$

$$= \frac{m}{\omega}\int_0^\infty d\tau\, \delta(t-\tau)\, \sin\omega(t-\tau)\, f(\tau) + m\int_0^\infty d\tau\, \theta(t-\tau)\cos\omega(t-\tau)\, f(\tau) =$$

$$= m\int_0^\infty d\tau\, \theta(t-\tau)\cos\omega(t-\tau)\, f(\tau)$$

si e' utilizzata la proprieta' $d/dt\{\theta(t)\} = \delta(t)$

L'espressione di $z(t)$ e' allora data da :

$$z(t) = \left(\frac{m}{2\hbar\omega}\right)^{1/2}\int_0^\infty d\tau\, \theta(t-\tau)\, f(\tau)\left[\sin\omega(t-\tau) + i\cos\omega(t-\tau)\right] =$$

$$= \left(\frac{m}{2\hbar\omega}\right)^{1/2} i\int_0^\infty d\tau\, \theta(t-\tau)\, f(\tau)\, e^{-i\omega(t-\tau)} =$$

$$= i\left(\frac{m}{2\hbar\omega}\right)^{1/2} e^{-i\omega t}\int_0^t d\tau\, f(\tau)\, e^{i\omega\tau} \qquad (I,3,8)$$

(c) L'hamiltoniana quantistica corrispondente alla (I,3,6) fatte le sostituzioni (I,1,3) e trascurando l'energia dello stato fondamentale e'

$$\begin{cases} \hat{H}_f = \hbar\omega\, \hat{a}^+\hat{a} + F(t)(\hat{a} + \hat{a}^+) \\ F(t) = -f(t)\left(\dfrac{\hbar m}{2\omega}\right)^{1/2} \end{cases} \qquad (I,3,9)$$

e lo stato fondamentale corrispondente alle condizioni iniziali (I,3,7) e' lo stato fondamentale $|0\rangle$.

Per risolvere il problema dell'evoluzione dinamica e' conveniente utilizzare la descrizione di interazione separando l'Hamiltoniana in una parte "armonica" $H = \hbar\omega\, \hat{a}^+\hat{a}$ e in un termine forzante $V = F(t)(\hat{a}+\hat{a})$.

L'equazione per lo stato $|\psi_I(t)\rangle$ e' :

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi_I(t)\rangle = V_I(t)|\psi_I(t)\rangle \qquad (I,3,10)$$

cioe' l'evoluzione temporale dello stato e' determinata dalla sola hamiltoniana di interazione, che va espressa nella descrizione di interazione :

$$\hat{V}_I(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}\, \hat{V}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t} = F(t)\, e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}(\hat{a}+\hat{a}^+)\, e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t} =$$

$$= F(t)\left(\hat{a}\,e^{-i\omega t} + \hat{a}^+ e^{i\omega t}\right).$$

per quest'ultimo passaggio si e' fatto uso delle relazione valida per ogni operatore :

$$e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\,\hat{A}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t} = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{i}{\hbar}\right)\frac{t^m}{m!}\left[\hat{H}_0\left[\ldots\left[H_0,\hat{A}\right]\ldots\right]\right]$$

e delle regole di commutazione di $\hat{a}$, $\hat{a}^+$ con l'Hamiltoniana $\hat{H}_0$ dell'oscillatore armonico :

$$\left[\hat{H}_0,\hat{a}\right] = -\hbar\omega\hat{a} \qquad ; \qquad \left[\hat{H}_0,\hat{a}^+\right] = \hbar\omega\hat{a}^+$$

Scrivendo la soluzione della (I,3,10) con l'operatore di evoluzione temporale si ottiene :

$$|\psi_I(t)\rangle = U(t,t_0)\,|\psi_I(t_0)\rangle$$

$$U(t,t_0) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^m\frac{1}{m!}\int_{t_0}^{t}dt_1\ldots\int_{t_0}^{t_{m-1}}dt_m\,T\left[V_I(t_1)\ldots V_I(t_m)\right]$$

dove T e' l'operatore di ordinamento cronologico.

Il calcolo dell'operatore di evoluzione temporale fornisce il seguente risultato :

$$U(t,t_0) = e^{i\phi(t)}\,e^{\zeta\hat{a}^+ - \zeta^*\hat{a}}$$

essendo :

$$\zeta(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t F(\tau)\,e^{i\omega\tau}\,d\tau$$

$$\phi(t) = \frac{i}{2\hbar^2}\int_0^t dt'\int_0^{t'}dt''\left[F(t')F(t'')e^{-i\omega(t'-t'')} - F(t')F(t'')e^{i\omega(t'-t'')}\right] \qquad (I,3,11)$$

Lo stato al tempo t e' allora dato da :

$$|\psi_I(t)\rangle = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}F(\tau)\left(e^{i\omega\tau}\hat{a}^+ + e^{-i\omega\tau}\hat{a}\right)d\tau\right\}|\psi_I(t)\rangle =$$

$$= e^{i\phi(t)}\,e^{\zeta\hat{a}^+ - \zeta^*\hat{a}}\,|0\rangle = e^{i\phi(t)}\,|\zeta(t)\rangle$$

dove si e' anticipato il risultato che verra' dimostrato in §(I,4) :

$$e^{\zeta\hat{a}^+ - \zeta^*\hat{a}}|0\rangle = |\zeta\rangle$$

Per ottenere l'esatta analogia con la meccanica classica e' necessario far uso della descrizione di Schrödinger, correlata a quella di interazione da un operatore unitario.

Otteniamo quindi, applicando la (I,1,7) :

$$|\psi_S(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}|\psi_I(t)\rangle = e^{-i\omega\hat{a}^+\hat{a}t}\, e^{-i\phi(t)}|\zeta(t)\rangle =$$
$$= e^{i\phi(t)}|\zeta(t)e^{-i\omega t}\rangle = e^{i\phi(t)}|z(t)\rangle$$

In quest'ultima equazione si e' posto :

$$z(t) = \zeta(t)\, e^{-i\omega t} = i\, e^{-i\omega t}\left(\frac{m}{2\omega\hbar}\right)^{1/2}\int_{t_0}^{t} f(\tau)\, e^{i\omega\tau}\, d\tau$$

che e' esattamente l'espressione di $z(t)$ (I,3,8) trovata nel caso classico.

Dalla relazione (I,1,11) possiamo inoltre ottenere un'equazione differenziale per la fase $\phi(t)$:

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{i}{2\hbar^2}\int_0^t d\tau\left(F(t)F(\tau)\, e^{-i\omega t}e^{i\omega\tau} - F(t)F(\tau)\, e^{i\omega t}e^{-i\omega\tau}\right) =$$
$$= -\frac{i}{2\hbar}\left[F(t)\, e^{-i\omega t}\zeta(t) + F(t)\, e^{i\omega t}\zeta^*(t)\right]$$

ricordando l'espressione di $z(t)$ e confrontando le (I,3,2) e (I,3,9) che forniscono $\bar{F}(t) = \gamma(t)$ si scrive :

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar}\mathrm{Re}\left[\gamma^*(t)\, z(t)\right]$$

che e' esattamente l'equazione precedentemente ottenuta per l'evoluzione temporale della fase.

Questo semplice esempio mostra la potenza del procedimento algebrico nel trattare il problema dell'evoluzione dinamica degli stati coerenti ; tale metodo verra' utilizzato nel prossimo capitolo per dimostrare che la Hamiltoniana piu' generale che conserva la coerenza e' data dalla :

$$\hat{H} = \sum_{i,j=1}^{N} \omega_{ij}(t)\, \hat{a}_i^{+} \hat{a}_j + \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \left[\gamma^{*}(t)\, \hat{a}_k + \gamma(t)\, \hat{a}_k^{+} \right] + \beta(t)$$

Un terzo metodo che consente di evidenziare la corrispondenza dinamica classico-quantistica fa uso del "path integral" sugli stati coerenti.

§ (I,4): "Stati Coerenti generalizzati dell'oscillatore armonico"

E' possibile dare una definizione equivalente degli stati di Glauber che sfrutta proprieta' strettamente algebriche [2]. Questo e' il punto di partenza da cui muoveremo nel prossimo capitolo per generalizzare il concetto di stato coerente. A tale fine si scrivono gli stati $|z\rangle$ come vettori ottenuti da uno stato base $|\Omega\rangle$ prefissato agendo su di esso con un operatore unitario ad un parametro $D(z)$ opportunamente definito; si richiede inoltre che gli operatori soddisfino a leggi di composizione di tipo gruppale.

Cerchiamo un set di operatori $D(z)$ che agiscono sugli operatori $\hat{a};\hat{a}^+$ come operatori di traslazione ("displacement operators")

$$\hat{D}^{-1}(z)\,\hat{a}\,\hat{D}(z) = \hat{a} + z \qquad (I,4,1.a)$$

$$\hat{D}^{-1}(z)\,\hat{a}^+\hat{D}(z) = \hat{a}^+ + z^* \qquad (I,4,1.b)$$

Gli stati di Glauber sono allora ottenuti come "traslazione" dello stato di vuoto $|0\rangle$ per mezzo di questi operatori :

$$|z\rangle = \hat{D}(z)\,|0\rangle \qquad (I,4,2)$$

come verificheremo alla fine del presente paragrafo. Per dare un'espressione esplicita dell'operatore $D(z)$ si fornisce l'equazione differenziale a cui deve soddisfare.

E' necessario allora conoscere la forma dell'operatore D(dz) relativa a valori infinitesimi del parametro.

In tale caso l'operatore che soddisfa alle corrette regole di commutazione (I,4, 1 .a,b) e' dato da :

$$\hat{D}(dz) = \hat{I} + dz\,\hat{a}^{+} - dz^{*}\hat{a} \qquad (I,4,3\,.a)$$

$$\hat{D}^{-1}(dz) = \hat{I} - dz\,\hat{a}^{+} + dz^{*}\hat{a} = \left(\hat{D}(dz)\right)^{+} \qquad (I,4,3\,.b)$$

come e' facilmente verificabile.

Consideriamo poi un particolare incremento unidirezionale scrivendo :

$$\hat{D}(z+dz) = \hat{D}(z(1+d\lambda)) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

e richiediamo una legge di composizione di tipo gruppale

$$\hat{D}(z(\lambda+d\lambda)) = \hat{D}(z\,d\lambda)\,\hat{D}(z\lambda)$$

otteniamo quindi

$$\hat{D}(z(\lambda+d\lambda)) - \hat{D}(z(\lambda)) = \left(\hat{D}(z\,d\lambda) - \hat{I}\right) D(z\lambda) =$$
$$= d\lambda\,(z\hat{a}^{+} - z^{*}\hat{a})\,D(z\lambda)$$

da cui segue l'equazione differenziale :

$$\frac{d}{d\lambda}\left[D(z\lambda)\right] = (z\hat{a}^{+} - z^{*}\hat{a})\,D(z\lambda)$$

La condizione iniziale si ottiene facilmente dalle (I,4, 1 .a,b)

$$\hat{D}(0) = \hat{I}$$

L'espressione esplicita dell'operatore e' allora :

$$D(z) = \exp(z\hat{a}^{+} - z^{*}\hat{a}) \qquad (I,4,4)$$

Verifichiamo che gli stati definiti dalle (I,4,2),(I,4,4) coincidono esattamente con quelli di Glauber.

Si deve sfruttare a tal fine la relazione di Backer-Campbell-

Hausdorff semplificata [10] che possiamo riassumere in questi termini :

se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono due operatori tali che :

$$[[\hat{A},\hat{B}],\hat{A}] = [[\hat{A},\hat{B}],\hat{B}] = 0$$

allora vale la relazione :

$$\exp(\hat{A})\exp(\hat{B}) = \exp\left(\hat{A}+\hat{B}+\tfrac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]\right) \qquad (I,4,5)$$

Nel caso da noi considerato $\hat{A}=z\hat{a}^{+}$ $B=-z^{*}\hat{a}$ $[\hat{A},\hat{B}]=+|z|^2$ si puo' allora scrivere in modo piu' conveniente l'operatore (I,4,4)

$$D(z) = \exp(z\hat{a}^{+} - z^{*}\hat{a}) = \exp\left(z\hat{a}^{+} - z^{*}\hat{a} + \tfrac{1}{2}|z|^2 - \tfrac{1}{2}|z|^2\right) =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|z|^2}\exp(z\hat{a}^{+})\exp(-z^{*}\hat{a})$$

Osserviamo inoltre che l'operatore $\exp(-z^{*}a)$ conserva il vuoto $|0\rangle$:

$$\exp(-z^{*}\hat{a})|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z^{*})^n}{n!}\hat{a}^n|0\rangle = |0\rangle$$

Applicando questi risultati otteniamo infine :

$$D(z)|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2}\exp(z\hat{a}^{+})|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\hat{a}^{+n}|0\rangle =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|z|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n!)^{1/2}}|n\rangle$$

che e' l'espressione (1,1,5) degli stati di Glauber (per l'ultimo passaggio ci siamo serviti dell'espressione degli autostati dell'operatore numero $|n\rangle=[1/(n!)^{1/2}](a\ )^n|0\rangle$).

Possiamo generalizzare la definizione di stato coerente per l'oscillatore armonico agendo con gli operatori $D(z)$ su un vettore $|\Omega\rangle$ di partenza qualsiasi dello spazio di Hilbert, in generale diverso dallo stato fondamentale $|0\rangle$:

$$|\zeta_\Omega\rangle = \exp(\zeta\hat{a}^+ - \zeta^* a)\,|\Omega\rangle$$

in tal modo si ottiene un diverso set di stati coerenti che soddisfano a tutte le proprieta' viste per gli stati di Glauber,salvo quella di essere autostati dell'operatore di distruzione $\hat{a}$.

In particolare,scegliendo il vettore di partenza come segue :

$$|\Omega_\xi\rangle = \exp\left\{\frac{1}{2}\left(\xi^*\hat{a}^2 - \xi\hat{a}^{+2}\right)\right\}|0\rangle$$

si ottengono i cosiddetti stati "squeezed" [11].

Tali stati,oltre a minimizzare la relazione di indeterminazione di Heisenberg ($\Delta p\,\Delta q = \hbar/2$) consentono,al contrario degli stati di Glauber,di diminuire a piacere l'indeterminazione di una delle variabili coniugate,a discapito dell'altra,conservandone il prodotto.

Questa proprieta' potrebbe essere utilizzata per la trasmissione di segnali,riducendo al massimo l'indeterminazione quantistica su una delle due componenti in quadratura modulando il segnale su di essa,e lasciando il rumore quantistico sulla componente non "schiacciata".

CAPITOLO II

STATI COERENTI DI ALGEBRE DI LIE SEMISEMPLICI

§ (II, 1) : "Stati coerenti per un generico Gruppo di Lie"

Come si e' visto gli stati di Glauber sono strettamente legati all'algebra $\mathcal{W}$ degli operatori di Bcse $\hat{a}, \hat{a}^+, \hat{I}$ nella quale il prodotto e' dato dalle relazioni di commutazione :

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = \hat{I}$$
$$[\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^+, \hat{a}^+] = [\hat{a}, \hat{I}] = [\hat{a}^+, \hat{I}] = 0 \qquad (II,1,1)$$

$\mathcal{W}$ e' un'algebra di Lie sui complessi, cioe' uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ sul quale e' definita una seconda operazione interna, detta prodotto di Lie, distributiva rispetto alla somma e per la quale vale :

$[a;\lambda b] = [\lambda a;b] = \lambda [a;b]$ (cioe' $\mathcal{W}$ e' un'algebra).

Inoltre il prodotto soddifa alle due ulteriori proprieta' :

$$[a;b] = -[b;a]$$

$$[[a;b];c]+[[b;c];a]+[[c;a];b]=0$$

(quest'ultima e' detta identita' di Jacobi).

Ad ogni algebra di Lie $\mathcal{W}$ e' associato un gruppo di Lie, cioe' un gruppo topologico che e' una varieta' C^∞ per la quale le operazioni prodotto e passaggio all'inverso sono mappe C^∞ [12].

Il gruppo di Lie associato all'algebra $\mathcal{W}$ degli operatori di

Bose e' detto gruppo di Heisenberg-Weyl W, e gli operatori :

$$D(z)=e^{z\hat{a}^{+}-z^{*}\hat{a}}$$

utilizzati nella formula (I,4,4) per la definizione degli stati di Glauber generalizzati,sono elementi della rappresentazione del gruppo W sullo spazio di Fock ; per tale motivo chiameremo gli stati di Glauber stati coerenti del gruppo di Weyl. Esaminando l'esempio degli stati di Glauber possiamo individuare i punti chiave necessari per dare una definizione di stati coerenti per un generico gruppo di Lie.
Considero un generico elemento dell'algebra (II,1,1) del tipo:

$$t\hat{I}+i\left(z^{*}\hat{a}-z\hat{a}^{+}\right) \qquad t\in\mathbb{R}\ ,\ z\in\mathbb{C}$$

(dovendo costruire un gruppo di operatori unitari devo scegliere una combinazione lineare di elementi di $\mathcal{W}$ che sia hermitiana);gli operatori :

$$T(t,z)=\exp\left\{i\left[t\hat{I}+i\left(\hat{z}^{*}\hat{a}-z\hat{a}^{+}\right)\right]\right\}=e^{it}D(z) \qquad (II,1,2)$$

costituiscono una rappresentazione unitaria del gruppo di Weyl sullo spazio di Fock.Intendiamo qui con exp la mappa esponenziale che ad ogni elemento dell'algebra di Lie associa un elemento della parte connessa all'identita' del gruppo.Tale mappa e' definita per una qualsiasi varieta',ed ha come dominio lo spazio tangente alla varieta' e come immagine un aperto della varieta'.
Vale pertanto nel caso di gruppi di Lie essendo l'algebra di Lie lo spazio tangente al gruppo nell'identita';in tal caso inoltre l'immagine della mappa esponenziale e' tutta la parte connessa all'identita' del gruppo (se l'algebra e il gruppo

sono rappresentati da matrici la mappa esponenziale corrisponde proprio a costruire la serie esponenziale degli elementi dell'algebra).

Il gruppo di Weyl e' etichettato da tre parametri reali ($t \in R$; $\alpha \in C$) : la legge di composizione e' data da :

$$\circ : W \times W \longrightarrow W$$

$$\circ : \big((t,\alpha).(s,\beta)\big) \longrightarrow \big(t+s+\mathrm{Im}(\alpha^*\beta),\ \alpha+\beta\big)$$

come e' verificabile nella rappresentaione (II,1,2) utilizzando la formula di Becker-Campbell-Hausdorff semplificata (I,4,5); l'elemento neutro del gruppo e' $e=(0,0)$ e l'inverso dell'elemento $q=(t,\alpha)$ e' dato da $g^{-1}=(-t,-\alpha)$.

Precisiamo ora la relazione esistente tra gli operatori $D(z)$ della (I,4,4) e gli operatori $T(t,z)$ della rappresentazione unitaria di W (II,1,2).

Fissiamo un vettore $|\Omega\rangle$ nello spazio di Fock e consideriamo il vettore ottenuto agendo su di esso con l'operatore $T(t,z)$:

$$T(t,z)|\Omega\rangle = \exp\left(it\,\hat{I} + z\hat{Q}^+ - z^*\hat{Q}\right)|\Omega\rangle = e^{it}\,D(z)|\Omega\rangle$$

esso coincide, a meno di un fattore di fase con lo stato di Glauber generalizzato definito nei §(I,4) ; scegliendo come vettore $|\Omega\rangle$ lo stato $|0\rangle$ otteniamo, sempre a meno del fattore di fase moltiplicativo, lo stato di Glauber $|z\rangle$ (I,1,5).

Poiche' lo stato fisico del sistema non dipende dal fattore di fase avremmo ottenuto un vettore equivalente scegliendo, anziche' l'operatore $T(t, z)$ un operatore del tipo :

$$T(t+s, z) = T(t, z)\, T(s, 0)$$

il contributo del $T(s,0)$ e' infatti semplicemente quello di cambiare la fase del vettore $|\Omega\rangle$.

Siamo ora in possesso di tutti gli elementi che consentono di definire stati coerenti per un generico gruppo di Lie [13].

Sia G un gruppo di Lie arbitrario , sia T una rappresentazione unitaria irriducibile di G che agisce su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$; ricordiamo che cio' significa che esiste una mappa T da G in un gruppo $D(\mathcal{H}) \subset GL(\mathcal{H})$ di trasformazioni lineari di $\mathcal{H}$ tale che :

(1) $\{T(g); g \in G\} = D(\mathcal{H})$ cioe' sia suriettiva

(2) $\forall g_1, g_2 \in G \quad T(g_1 \circ g_2) = T(g_1) \times T(g_2)$ cioe' sia un omomorfismo tra i due gruppi

(3) $\forall g \in G \quad T(g)$ e' unitario

(4) $\mathcal{H}$ non ammette sottospazi propri invarianti rispetto alle trasformazioni di $D(\mathcal{H})$ (irriducibilita')

(5) la mappa :

$$G \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$
$$(g, |\psi\rangle) \longrightarrow T(g)|\psi\rangle$$

deve inoltre essere analitica.

Sia $|\psi_0\rangle$ un vettore fissato di norma unitaria nello spazio di Hilbert ; consideriamo l'insieme :

$$\{|\psi_g\rangle = T(g)|\psi_0\rangle, \; g \in G\} \qquad (II,1,3)$$

I vettori di questo insieme sono normalizzati essendo T una rappresentazione unitaria, ma per poter associare gli stati del sistema ai vettori di questo tipo e' necessario introdurre una relazione di equivalenza che faccia corrispondere una sola classe a tutti i vettori che differiscono di un fattore di fase moltiplicativo.

Osserviamo che due elementi $|\psi_{g_1}\rangle, |\psi_{g_2}\rangle$ della (II,1,3) differiscono di un fattore di fase moltiplicativo se e solo se :

$$T(g_1^{-1} g_2)|\psi_0\rangle = e^{i\phi}|\psi_0\rangle \qquad \text{(II,1,3)}$$

Infatti deve essere

$$|\psi_{g_2}\rangle = e^{i\phi}|\psi_{g_1}\rangle \quad ; \quad T(g_2)|\psi_0\rangle = e^{i\phi}\, T(g_1)\,|\psi_0\rangle$$

moltiplicando a sinistra per $T^{-1}(g_1) = T(g_1^{-1})$ si ha :

$$T(g_1^{-1})T(g_2)|\psi_0\rangle = e^{i\phi}\,|\psi_0\rangle$$

ed utilizzando le proprieta' generali delle rappresentazioni si ottiene proprio la (II,1,3).

Ponendo $g_1^{-1} g = h$ consideriamo il sottoinsieme di G :

$$H = \{\, h \in G \ \text{ t.c. } \ T(h)|\psi_0\rangle = e^{i\alpha(h)}\,|\psi_0\rangle \quad \alpha(h) \in \mathbb{R} \,\}$$

costituito dagli elementi del gruppo il cui corrispondente operatore cambia il vettore $|\psi_0\rangle$ di un solo fattore di fase, lasciando quindi invariato lo stato del sistema.

H e' un sottogruppo ; per dimostrarlo verifichiamo la condizione necessaria e sufficiente :

se $h_1, h_2 \in H$ anche $h_1^{-1} \cdot h_2 \in H$

infatti :

$$T(h_1^{-1} h_2)|\psi_0\rangle = T(h_1^{-1})T(h_2)|\psi_0\rangle =$$

$$= e^{-i\alpha(h_1)} e^{i\alpha(h_2)} |\psi_0\rangle = e^{i[\alpha(h_2) - \alpha(h_1)]} |\psi_0\rangle$$

osserviamo anche che la mappa T ristretta ad H fornisce una rappresentazione unidimensionale di H.

Definiamo H "sottogruppo di stabilita'" di $|\psi_0\rangle$.

Due vettori $|\psi_{g_1}\rangle, |\psi_{g_2}\rangle$ relativi ad elementi g_1, g_2 di G appartenenti allo stesso laterale sinistro di H ;

$$gH = \{g' \in G \text{ t.c. } g' = gh \quad h \in H\} \qquad \text{(II,1,4)}$$

coincidono a meno di un fattore di fase $e^{i\alpha(h)}$;infatti :

$$|\psi_{g_2}\rangle = T(g_2)|\psi_0\rangle = T(g_1 h)|\psi_0\rangle = T(g_1)\,T(h)|\psi_0\rangle =$$

$$= e^{i\alpha(h)}\, T(g_1)|\psi_0\rangle = e^{i\alpha(h)}|\psi_{g_1}\rangle$$

Ogni stato fisico coerente e' allora completamente determinatoto da un laterale sinistro gH di H.

Introducendo la relazione di equivalenza :

$$g_1 \sim g_2 \iff g_1 H = g_2 H$$

Possiamo considerare l'insieme quoziente G/H che indicheremo con G/H=M e che chiameremo spazio quoziente del gruppo G rispetto ad H [12] ; gli stati coerenti sono etichettabili con punti di M.

Scegliendo un rappresentativo g(x) per ogni punto x di M e considerando il corrispondente vettore $T(g(x))|\psi_0\rangle$, che possiamo indicare piu' brevemente con $|x\rangle$,si ottiene un set di stati coerenti.

Se il sottogruppo di stabilita' H di $|\psi_0\rangle$ e' topologicamente chiuso esso e' un sottogruppo di Lie di G ; lo spazio M=G/H e' una varieta' differenziabile di cui G e' il gruppo di trasformazioni di Lie [12].Cio' significa che esiste una mappa differenziabile :

$$\varphi : G\times M \longrightarrow M \ , \quad \varphi(g,x) = gx \ (\text{def.})$$

tale che $\forall g_1, g_2 \in G$, $\forall x \in M$ si ha :

(1) $g_1(g_2 x)=(g_1 g_2)x$

(2) $ex=x$

L'azione del gruppo G sulla M e',nel caso esaminato,transitiva ($\forall x,y \in M, \exists g \in G$ t.c. $y=gx$) e la varieta' viene detta spazio omogeneo di G.

§(II,2): "Stati Coerenti di Algebre di Lie semisemplici complesse"

Il problema della definizione di un set di stati coerenti per un generico gruppo di Lie G e' connesso alla possibilita' di avere una rappresentazione unitaria irriducibile $\mathbb{U}$ del gruppo G su uno spazio di Hilbert H, e di poter scegliere in H un vettore ciclico, tale cioe' che, agendo su di esso con gli operatori della rappresentazione si ottenga tutto H. Tali proprieta' discendono in modo naturale dalla struttura stessa se il gruppo G e' il gruppo di Lie di un'algebra di Lie $\mathbb{G}$ semisemplice e complessa. Tratteremo quindi in questo paragrafo il caso di una generica algebra di Lie $\mathbb{G}$ di questo tipo. Ogni algebra di Lie si decompone comunque nella somma diretta di spazi vettoriali $\mathbb{G} = \mathbb{A} + \mathbb{B}$ essendo $\mathbb{A}$ una sottoalgebra semisemplice e $\mathbb{B}$ l'ideale massimale solubile di $\mathbb{G}$ (ricordiamo che un sottospazio $\mathbb{I} \subset \mathbb{G}$ di un'algebra di Lie e' un ideale se si ha $[\mathbb{I},\mathbb{G}] \subset \mathbb{I}$; un'algebra e' solubile se e' possibile trovare un certo $m \in \mathbb{N}$ tale che $\underbrace{[\mathbb{G},[\mathbb{G},[\ldots[\mathbb{G},[\mathbb{G},\mathbb{G}]]\ldots]]}_{m\text{-volte}}=0$); tale decomposizione e' detta "decomposizione di Levi". [14]

Lo studio delle algebre di Lie si divide quindi in due sezioni, una per le algebre solubili e l'altra per le algebre semisemplici : la seconda e' di maggiore interesse per le applicazioni fisiche, ed e' la meno banale per quanto riguarda la teoria delle rappresentazioni.

Esaminiamo quindi alcune proprieta' della struttura delle algebre di Lie semisemplici e delle loro rappresentazioni;per la dimostrazione delle proprieta' enunciate e per un approfondimento di quersto argomento si veda [15].

§(II,2.a):"Struttura di Algebre di Lie semisemplici complesse"

Un algebra di Lie $\mathbb{G}$ si dice semisemplice se essa non ammette alcun ideale abeliano (una sottoalgebra $\mathbb{I} \subset \mathbb{G}$ e' detta abeliana se si ha $[i_1, i_2]=0 \quad \forall i_1, i_2 \in I$).E' possibile dare una caratterizzazione equivalente di semisemplicita' utilizzando la nozione di "forma bilineare di Killing" cosi' definita :

$$B : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{G}$$

$$B : (x,y) \longrightarrow tr\,(ad(x), ad(y)) \qquad \text{(II,2,1)}$$

"ad(x)" indica l'automorfismo di $\mathbb{G}$ in se' che associa al generico elemento y $\mathbb{G}$ il prodotto di Lie $[x,y]$;esso rappresenta l'algebra sullo spazio vettoriale dell'algebra stessa e gli elementi di matrice in questa rappresentazione ("aggiunta") sono le costanti di struttura dell'algebra $\mathbb{G}$.La traccia e' intesa in questa rappresentazione.Un'algebra di Lie e' semisemplice se e solo se la sua forma di Killing e' non degenere. Una sottoalgebra $\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$ di un'algebra di Lie semisemplice complessa e' detta "sottoalgebra di Cartan" se essa e' massimale abeliana e se e' costuita da elementi h tali che ad(h) e' diagonalizzabile su $\mathbb{G}$.Tutte le possibili sottoalgebre di Cartan hanno la stessa dimensione r detta "rango di $\mathbb{G}$".Sia ora

$\mathbb{H}^*$ lo spazio duale di $\mathbb{H}$,cioe' l'insieme di tutte le applicazioni ("forme") lineari da $\mathbb{H}$ a valori in $\mathbb{C}$;una forma lineare $\alpha \in \mathbb{H}^*$ si dice "radice di $\mathbb{G}$" se esiste un vettore non nullo $x_\alpha \in G$ che sia autovettore simultaneo degli operatori ad(h) con autovalore $\alpha(h)$ dove $h \in H$;tale vettore e' detto "vettore di radice".Salvo nel caso banale di algebra $\mathbb{G}$ commutativa un tale vettore deve esistere per il fatto che gli operatori ad(h) sono diagonalizzabili e commutano.

Possiamo quindi scrivere :

$$[h, x_\alpha] = \alpha(h)\, x_\alpha \qquad (II,2,2)$$

Indichiamo con $\mathbb{G}^\alpha$ l'insieme degli autovettori corrispondenti alla radice α e con $R \subset \mathbb{H}^*$ l'insieme di tutte le radici non nulle di $\mathbb{G}$.

$\mathbb{G}^\alpha$ e' un sottospazio vettoriale di $\mathbb{G}$ ed e' detto "sottospazio di radice associato alla radice α ";lo spazio corrispondente alla radice nulla coincide con la sottoalgebra di Cartan $\mathbb{H}$ ed ha quindi dimensione pari al rango di $\mathbb{G}$,gli spazi corrispondenti a radici non nulle hanno invece tutti dimensione 1 e $\mathbb{G}$ puo' essere decomposto come somma diretta di questi sottospazi di radice e delle sottoalgebre di Cartan :

$$\mathbb{G} = \mathbb{H} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in R} \mathbb{G}^\alpha \right) \qquad (II,2,3)$$

Per descrivere adeguatamente la struttura di $\mathbb{G}$ si devono ricordare alcune proprieta' dell'insieme R delle radici.

i) Se $\alpha \in \mathbb{H}^*$ e' una radice allora anche $-\alpha$ lo e',e le uniche radici multiple di α sono $0, \pm\alpha$.

ii) Se x_α ed x_β sono i vettori di radice associati rispettivamente alle radici α e β e se il loro prodotto di Lie $[x_\alpha, x_\beta]$ e' non nullo, allora quest'ultimo e' un vettore di radice relativo ad $\alpha+\beta$; si scrivera' quindi :

$$[x_\alpha, x_\beta] \in \mathbb{G}^{\alpha+\beta} \qquad \text{(II,2,4)}$$

e nel caso particolare in cui $\alpha+\beta=0$

$$[x_\alpha, x_{-\alpha}] \in \mathbb{H}$$

iii) Con l'insieme delle radici si puo' generare uno spazio vettoriale euclideo.

La forma di Killing che e' non degenere in $\mathbb{G}$ (per la semisemplicita') e' non degenere anche in $\mathbb{H}$; allora, se $\mu \in \mathbb{H}^*$ e' una qualsiasi forma lineare su $\mathbb{H}$ esiste un unico elemento $h_\mu \in \mathbb{H}$ tale che :

$$B(h_\mu, h) = \mu(h) \quad \forall h \in \mathbb{H} \qquad \text{(II,2,5)}$$

in particolare possiamo associare ad ogni radice $\alpha \in R \subset \mathbb{H}^*$ un vettore h_α.

Consideriamo l'insieme delle combinazioni lineari a coefficienti reali degli h_α cosi' definiti ed indichiamo con $\mathbb{H}^R$ tale spazio vettoriale reale. La dimensione di $\mathbb{H}^R$ coincide con la dimensione di $\mathbb{H}$ sui complessi : cio' significa quindi che esistono almeno r vettori di tipo h_α che costituiscono una base per $\mathbb{H}$ e quindi anche r radici $\alpha \in R$ che sono una base per $\mathbb{H}^*$.

La forma di Killing ristretta ad $\mathbb{H}^{\mathbb{R}}$ assume valori reali ed e' definita positiva.Se allora consideriamo l'insieme $R^{\mathbb{R}}$ delle combinazioni reali delle radici esso e' uno spazio vettoriale di dimensione reale r ; su esso e' possibile assegnare un prodotto scalare come segue : se $\mu, \nu \in R^{\mathbb{R}} \subset \mathbb{H}^*$ definiremo

$$(\mu,\nu)=B(h_\mu,h_\nu)=\mu(h_\nu)=\nu(h_\mu) \qquad \text{(II,2,6)}$$

dove i vettori h_μ, h_ν sono associati alle forme μ, ν in base alla (II,2,5).

Tali vettori stanno inoltre in $\mathbb{H}^{\mathbb{R}}$,e cio' comporta che la (II,2,6) definisce un prodotto scalare in $R^{\mathbb{R}}$, definito positivo,e quindi che $R^{\mathbb{R}}$ e' uno spazio euclideo.

iv) E' possibile introdurre in $R^{\mathbb{R}}$ un ordinamento,detto "ordine lexico-grafico" come segue : fissata una base ordinata in $R^{\mathbb{R}}$ i vettori di $R^{\mathbb{R}}$ sono rappresentabili come n-ple di numeri reali che costituicono le loro coordinate rispetto alla base assegnata : diremo allora che $\mu = (\mu_1,\dots,\mu_r)$ che appartiene ad $R^{\mathbb{R}}$ e' maggiore di $\nu = (\nu_1,\dots,\nu_r) \in R^{\mathbb{R}}$ e scriveremo $\mu > \nu$,se la prima componente non nulla della loro differenza e' positiva :

$$\mu_i=\nu_i \quad i=1,2,\dots,k \qquad \mu_{k+1}-\nu_{k+1}>0$$

In virtu' di questo ordinamento potremo parlare in $R \subset R^{\mathbb{R}}$ di radici "positive" (R^+) o "negative" (R^-).La decomposizione (II,2,3) puo' allora essere posta nella forma :

$$\mathbb{G} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{G}^+ \oplus \mathbb{G}^- \qquad \text{(II,2,3.b)}$$
$$\mathbb{G}^+ = \bigoplus_{\alpha\in R^+} \mathbb{G}^{\alpha} \qquad \mathbb{G}^- = \bigoplus_{\alpha\in R^+} \mathbb{G}^{-\alpha}$$

Gli spazi vettoriali $\mathbb{G}^+$ e $\mathbb{G}^-$ sono sottoalgebre nilpotenti di $\mathbb{G}$ per le equazioni (II,2,4).

v) E' possibile individuare alcune radici positive che non possono essere scritte come somma (a coefficienti positivi) di altre radici positive;esse sono dette radici "semplici" e corrispondono a vettori di radice positiva non ottenibili come prodotti di Lie di altri vettori di radice positiva.Se r e' il rango di $\mathbb{G}$ esistono esattamente r radici semplici positive $\alpha_i \in R \subset \mathbb{H}^*$ $i=1,\dots,r$ che costituiscono una base per R ;se inoltre $\beta \in \mathbb{H}^*$ e' un'arbitraria radice di $\mathbb{G}$ essa si scrive,in modo unico, come combinazione lineare delle radici semplici positive, con coefficienti interi e concordi :

$$\beta = \sum_{i=1}^{r} \beta_i \alpha_i \; ; \quad \beta_i \in \mathbb{Z} \; ; \quad \beta_i \beta_j \geq 0 \quad \forall i,j \qquad \text{(II,2,7)}$$

L'insieme delle radici semplici positive sara' indicato con R_S.

vi) A partire dalle radici semplici positive possiamo determinare un insieme di generatori per l'algebra $\mathbb{G}$ tra i quali esistono semplici regole di moltiplicazione di Lie. Sia infatti $\alpha_i \in R$ una radice semplice positiva;ad essa associamo tre vettori in $\mathbb{G}$ in questo modo : $h_{\alpha_i} \in \mathbb{H}$ definito dalla (II,2,5), $x_{\alpha_i} \in \mathbb{G}^+$, $x_{-\alpha_i} \in \mathbb{G}^-$,vettori di radice qualsiasi corrispondenti ad α_i .Considerando le varie terne ($h_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}, x_{-\alpha_i}$) al variare di $\alpha_i \in R_S$, costruiamo la "base di Chevalley" di G come segue :

$$h_i = \frac{2h_{\alpha_i}}{(\alpha_i,\alpha_i)} \in \mathbb{H} \qquad \text{(II,2,8.a)}$$

$$e_i = x_{\alpha_i} \in \mathcal{G}^{+\alpha_i} \quad ; \quad f_i = \frac{2\, x_{-\alpha_i}}{(\alpha_i;\alpha_i)\, B(x_{\alpha_i}, x_{\alpha_i})} \in \mathcal{G}^{-\alpha_i} \qquad \text{(II,2,8.b)}$$

Per questi elementi valgono le seguenti regole di moltiplicazione :

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij}\, h_i \qquad \text{(II,2,9.a)}$$

$$[h_i, e_j] = A_{ij}\, e_j \qquad [h_i, f_j] = -A_{ij}\, f_j \qquad \text{(II,2,9.b)}$$

(in tali formule non si deve sommare rispetto agli indici ripetuti);gli elementi A_{ij} costituiscono una matrice detta "matrice di Cartan" ed il loro valore e' dato da :

$$A_{ij} = -\frac{2\,(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}$$

che e' un numero intero per tutte le coppie di radici semplici α_i, α_j.

La matrice di Cartan determina univocamente la struttura dell'algebra di Lie semisemplice G.

Successivamente indicheremo sempre con e_α, f_β rispettivamente i vettori di radice positiva (α) o negativa ($-\beta$) nerati per prodotto di Lie dagli elementi della base di Chevalley.Essi individuano tutti i possibili spazi di radici e costituiscono una base (nel senso degli spazi vettoriali) per $\mathcal{G}^+$ e per $\mathcal{G}^-$.

§(II,2.b):"Rappresentazione di Algebre di Lie semisemplici complesse"

Consideriamo una rappresentazione $\mathcal{T}$ dell'algebra $\mathcal{G}$ semisemplice complessa su uno spazio vettoriale V di dimensione finita; cio' significa che esiste una mappa che ad ogni elemento $a \in \mathbb{G}$ dell'algebra fa corrispondere un'operatore lineare $T(a)$ che agisce sullo spazio V, che tale corrispondenza e' lineare (rispetto alle strutture di spazio vettoriale di $\mathbb{G}$ e di V) e che associa al prodotto di Lie $[a,b]$ di due elementi arbitrari dell'algebra il commutatore $[T(a),T(b)]=T(a)T(b)-T(b)T(a)$ tra gli operatori corrispondenti (il prodotto degli operatori e' ovviamente definito in una data base dal prodotto tra le matrici che rappresentano gli operatori).

Se $\mathbb{H}$ e' una sottoalgebra di Cartan, e quindi abeliana, le matrici $T(a)$ con $a \in \mathbb{H}$ sono simultaneamente diagonalizzabili su V. Esisteranno quindi dei vettori $v_\mu \in V$ tali che, per ogni elemento $h \in \mathbb{H}$ si ha :

$$T(h)\, v_\mu = \mu(h)\, v_\mu \qquad \text{(II,2,10)}$$

essendo $\mu \in \mathbb{H}^*$ una forma lineare definita su $\mathbb{H}$. Per ogni forma μ l'insieme dei vettori v_μ per i quali vale la (II,2,10) e' un sottospazio vettoriale di V che possiamo indicare con V^μ ; nel caso in cui esso non si riduca al solo vettore nullo ($V^\mu \neq [\underline{0}]$) la forma lineare μ viene detta "peso della rappresentazione", e i vettori v_μ "vettori di peso μ". Una rappresentazione di $\mathbb{G}$ su uno spazio di dimensione finita ammette almeno un peso μ.

Di notevole importanza e' il modo in cui gli elementi di $\mathbb{G}$ agiscono sugli spazi V^μ: se $x_\alpha \in \mathbb{G}^\alpha$ e' un vettore di radice di $\mathbb{G}$ associato alla radice $\alpha \in R$, la sua azione su un vettore di peso $v_\mu \in V$ da' luogo ad un vettore nullo, o ad un altro vettore di peso, associato al peso $\mu + \alpha \in \mathbb{H}^*$: in generale potremo quindi scrivere :

$$v_\mu \in V^\mu,\ x_\alpha \in \mathbb{G}^\alpha \Rightarrow T(x_\alpha) v_\mu \in V^{\mu+\alpha} \qquad \text{(II,2,11)}$$

Un vettore $v_\lambda \in V$ si dice "vettore di peso massimo" se λ e' il massimo dei pesi della rappresentazione rispetto all'ordine lexico-grafico in $\mathbb{H}^*$; questo implica che v_λ e' annichilato da qualsiasi vettore di radice positiva :

$$x_\alpha \in \mathbb{G}^\alpha\ \alpha \in R^+ \Rightarrow T(x_\alpha) v_\lambda = 0 \qquad \text{(II,2,12)}$$

condizione sufficiente e' ovviamente che sia annichilato dalle radici semplici; richiederemo inoltre, perche' v_λ sia "di peso massimo", che esso sia ciclico, cioe' :

$$T(\mathbb{G}) v_\lambda = V$$

in tal caso si dice che $\lambda \in \mathbb{H}^*$ e' il "peso massimo" della rappresentazione. Se $\lambda \in \mathbb{H}^*$ e' il peso massimo della rappresentazione, allora il sottospazio V^λ e' unidimensionale, ed ogni altro peso μ della rappresentazione puo' essere scritto nella forma :

$$\mu = \lambda - \sum_{i=1}^{m} m_i \alpha_i \qquad \alpha_i \in R_S \qquad \text{(II,2,13)}$$

essendo m_i numeri interi e non negativi : lo spazio della rappresentazione si decompone inoltre in somma diretta dei sottospazi V^μ :

$$V = \bigoplus_\mu V^\mu \qquad \text{(II,2,14)}$$

Chiameremo questa rappresentazione di $\mathbb{G}$ "rappresentazione di peso massimo λ " e la indicheremo con T_λ ; la ciclicita' del vettore di peso massimo implica l'irriducibilita' della rappresentazione,inoltre si dimostra che tutte le rappresentazioni irriducibili sono di peso massimo.

Si dimostra anche che $\mu \in \mathbb{H}^*$ e' un peso della rappresentazione se e solo se $\mu(h_\alpha) = (\mu, h_\alpha)$ e' un numero intero per qualsiasi radice α di R ; esso inoltre e' un peso massimo se e solo se (μ, h_{α_i}) e' non negativo per tutte le radici semplici e quindi per tutte le radici positive :

$$\lambda \text{ peso max} \iff (\lambda, \alpha) \geq 0 \quad \forall \alpha \in R^+ \qquad \text{(II,2,15)}$$

per le radici negative si avra' ovviamente $(\lambda, \beta) < 0$, in virtu' del fatto che $0, \beta, -\beta$ sono tutte e sole le radici multiple di β .

§(II,2.c):"Sottogruppo di stabilita' per il vettore di peso massimo"

Sia $T_\lambda(\mathbb{G})$ la rappresentazione irriducibile di $\mathbb{G}$ associata al peso massimo $\lambda \in \mathbb{H}^*$.Vogliamo considerare la possibilita' di definire un set di stati coerenti associato a questa rappresentazione irriducibile;a tal fine sceglieremo come vettore di partenza il vettore v_λ di peso massimo ; questa scelta e' dovuta al fatto che tale vettore e' ciclico per la rappresentazione $T_\lambda(G)$.

E' necessario quindi determinare la sottoalgebra $\mathbb{S}$ di $\mathbb{G}$ corrispondente al gruppo di stabilita' del vettore di peso massimo.

Ricerchiamo gli elementi di $\mathbb{G}$ che annichilano v_λ ,o che hanno v_λ come autovettore ; l'esponenziazione di tali elementi da' luogo ad operatori che trasformano il vettore v_λ solamente per un fattore moltiplicativo.

Per la definizione di vettore peso della rappresentazione (II,2,10) gli elementi della sottoalgebra H di Cartan sono diagonali su v_λ :

$$T_\lambda(h)v_\lambda = \lambda(h)\, v_\lambda \qquad \forall h \in \mathbb{H}$$

Essendo inoltre λ il peso massimo,i vettori di radice positiva $x_\alpha \in \mathbb{G}^+$ annichilano v_λ (II,2,12) :

$$T_\lambda(x_\alpha)v_\lambda = 0 \qquad \forall x_\alpha \in \mathbb{G}^+$$

Anche alcuni vettori di radice associati a radici negative potrebbero comunque annichilare il vettore di peso massimo. Se in fatti $x_{-\alpha} \in \mathbb{G}^-$ e' un vettore di radice corrispondente alla radice negativa $-\alpha$,l'operatore corrispondente $T(x_{-\alpha})$ applicato iterativamente al vettore v_λ da' origine ad una serie di vettori peso corrispondenti alle radici $\mu = \lambda - k\alpha$ (essendo k il numero di volte che $T(x_{-\alpha})$ e' stato applicato); tale serie si arresta quando si ottiene un vettore nullo.
Se p e' l'intero per cui si ha :

$$T^p_\lambda(x_{-\alpha})v_\lambda \neq 0 \quad ; \quad T^{p+1}_\lambda(x_{-\alpha})v_\lambda = 0$$

allora la "lunghezza" p della serie e' data dalla relazione :

$$p = \frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \tag{II,2,16}$$

E' evidente che $x_{-\alpha}$ ($\alpha \in R^+$) annichila v_λ se e solo se la serie ha lunghezza nulla : cio' avviene, in base alla (II,2,16), se e solo se la radice α e' ortogonale al peso λ (cioe' $(\lambda,\alpha)=0$). Sfruttando questa proprieta' riusciamo a completare la determinazione della sottoalgebra $\mathfrak{S}$ del vettore di peso massimo. Osserviamo dapprima che le radici ortogonali al peso massimo sono tutte e sole quelle ottenute come combinazioni lineari (a coefficienti concordi) di radici semplici ortogonali : infatti, per definizione di prodotto scalare in $R^{\mathbb{R}}$ (II,2,6), si ha che :

$$(\lambda,\alpha) = B(h_\lambda, h_\alpha) = \lambda(h_\alpha) \qquad \text{(II,2,17)}$$

Se β e' una radice qualsiasi essa puo' essere scritta come combinazione lineare di radici semplici positive, con coefficienti interi e concordi (II,2,7). A queste radici corrisponde un vettore $h_\beta \in H$ che possiamo esprimere nella base h_{α_i} come segue :

$$h_\beta = \sum_{i=1}^{r} c_i h_{\alpha_i}$$

per determinare i coefficienti c_i dello sviluppo consideriamo il prodotto scalare tra vettori h_β, h_{α_i} definiti dalla (II,2,5) :

$$B(h_\beta, h_{\alpha_i}) = (\beta,\alpha_i) = \beta(h_{\alpha_i}) = \sum_{j=1}^{r} \beta_j \alpha_j (h_{\alpha_i})$$

D'altra parte, sfruttando lo sviluppo di h_β e la bilinearita' della forma di Killing :

$$B(h_\beta, h_{\alpha_i}) = B\left(\sum_{j=1}^{r} c_j h_{\alpha_j}, h_{\alpha_i}\right) = \sum_{j=1}^{r} c_j B(h_{\alpha_j}, h_{\alpha_i})$$
$$= \sum_{j=1}^{r} c_j (\alpha_j, \alpha_i) = \sum_{j=1}^{r} c_j \alpha_j (h_{\alpha_i})$$

Confrontando le due espressioni e ricordando che B e' non degenere osserviamo che i coefficienti dello sviluppo di h_β sulla base delle h_{α_i} coincidono con i coefficienti di β rispetto alle radici semplici : per tale motivo la combinazione lineare che definisce h_β ha coefficienti concordi.

L'espressione (II,2,17) del prodotto scalare e' allora :

$$(\lambda,\beta)=\lambda(h_\beta)=\lambda\Big(\sum_{i=1}^{r}\beta_i h_{\alpha_i}\Big)=\sum_{i=1}^{r}\beta_i\lambda(h_{\alpha_i})=\sum_{i=1}^{r}\beta_i(\lambda,\alpha_i) \qquad \text{(II,2,17b)}$$

ricordiamo che il peso massimo λ ha proiezione positiva su tutte le radici semplici (II,2,15) ; essendo inoltre i coefficienti β_i concordi la (II,2,17b) si annulla se e solo se sono nulli tutti gli addendi $\beta_i(\lambda,\alpha_i)$: e' allora ovvio che le uniche radici semplici che possono comparire nell'espressione di β sono quelle ortogonali a λ .

'Indichiamo con $(R_S)_0$ e con $(R_S)_1$ i sottoinsiemi delle radici semplici positive rispettivamente ortogonali e non ortogonali a peso massimo :

$$(R_S)_0=\{\alpha_i\in R_S \;\; (\lambda,\alpha_i)=0\} \qquad \text{(II,2,18a)}$$

$$(R_S)_1=\{\alpha_i\in R_S \;\; (\lambda,\alpha_i)\neq 0\} \qquad \text{(II,2,18b)}$$

In sostanza i vettori radice $x_{-\beta}\in\mathcal{G}^{-\beta}$ di radici negative che annichilano il vettore di peso massimo sono tutti e soli quelli associati a radici (negative) "generate" dalle radici semplici di $(R_S)_0$.

Considereremo quindi il sottospazio $(\mathcal{G}^-)_0$ di $\mathcal{G}^-$ costituito da combinazioni lineari di tali vettori radice ; esso e' una sottoalgebra di $\mathcal{G}^-$ .Se infatti $x_{-\alpha}, x_{-\beta}$ sono vettori di $(\mathcal{G}^-)_0$, cioe' se $(\lambda,\beta)=(\lambda,\gamma)=0$, allora anche il prodotto di Lie $[x_{-\beta},x_{-\gamma}]$ sta in $(\mathbb{G}^-)_0$: questo perche' esso o e' nullo, o e' un vettore di radice associata a $-(\beta+\gamma)$ (II,2,4) e, per la bilinearita' del prodotto scalare, anche $\beta+\gamma$ e' ortogonale a λ :

$$(\lambda,\beta+\gamma) = (\lambda,\beta)+(\lambda,\gamma)=0$$

La sottoalgebra $(\mathbb{G}^-)_0$ coincide ovviamente con la sottoalgebra generata per somma di vettori o per prodotto di Lie, dai vettori f (II,2,8b) della base di Chevalley, corrispondenti a radici semplici ortogonali al peso massimo .

La sottoalgebra $\mathbb{S}$ e' allora :

$$\mathbb{S} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{G}^+ \oplus (\mathbb{G}^-)_0 \qquad \text{(II,2,19)}$$

Potremo quindi scrivere :

$$\forall x \in \mathbb{S} \quad T_\lambda(x)\, v_\lambda = \pi(x)\, v_\lambda \qquad \pi(x)\in\mathbb{C} \qquad \text{(II,2,20)}$$

(la mappa puo' essere considerata una rappresentazione unidimensionale di $\mathbb{S}$ sul campo complesso).

La $\mathbb{S}$ e' effettivamente una sottoalgebra di $\mathbb{G}$, Infatti ognuno dei tre insiemi $\mathbb{H},\mathbb{G},(\mathbb{G}^-)_0$ lo e', ed in particolare e' anche uno spazio vettoriale : la somma diretta $\mathbb{S}$ e' quindi ovviamente uno spazio vettoriale.

Per quanto riguarda il prodotto di Lie possiamo affermare :

i) $[\mathbb{H},\mathbb{G}^+]\subset\mathbb{G}^+$ $\qquad [\mathbb{H},(\mathbb{G}^-)_0]\subset(\mathbb{G}^-)_0$ $\qquad$ (*)

Bastera' verificare le relazioni (*) sui vettori e_α, f_α ottenuti come prodotti di Lie dei vettori della base di Chevalley (II,2,8) poiche' essi costituiscono una base per $\mathbb{G}^+$ e $\mathbb{G}^-$;d'altro canto essi sono vettori di radice, cioe'autovettori degli operatori ad($\mathbb{H}$) :

$$[h, e_\alpha] = \alpha(h) e_\alpha \quad ; \quad [h, f_\alpha] = -\alpha(h) f_\alpha$$

e quindi la (*) e' banalmente verificata.

ii) $[\mathbb{G}^+, (\mathbb{G}^-)_0] \subset \mathbb{S}$ (**)

Anche in questo caso e' sufficiente esaminare i prodotti di Lie del tipo $[e_\alpha, f_\beta]$. Se $\alpha+\beta=0$ (cioe' $\beta=-\alpha$) si ha $[e_\alpha, f_\alpha] \in \mathbb{H} \subset \mathbb{S}$; se $\alpha+\beta \neq 0$ i casi possibili sono due : $[e_\alpha, f_\beta]=0 \in S$, oppure per la (II,2,4) $[e_\alpha, f_\beta] = x_{\alpha-\beta}$. Se $\alpha-\beta$ e' una radice positiva, $x_{\alpha-\beta} \in \mathbb{G}^+ \subset \mathbb{S}$; se invece $\alpha-\beta$ e' una radice negativa bastera' verificare che il prodotto scalare con λ e' nullo ; per la linearita' del prodotto scalare avremo :

$$(\lambda, \alpha-\beta) = (\lambda, \alpha) - (\lambda, \beta) = (\lambda, \alpha) \geq 0$$

si e' sfruttato il fatto che β e' ortogonale a λ e l'equazione (II,2,15). D'altro canto, se la disuguaglianza valesse in senso stretto $\alpha-\beta$ sarebbe una radice positiva contro l'ipotesi, deve quindi essere :

$$(\lambda, \alpha-\beta) = 0$$

questo comporta che $x_{\alpha-\beta} = [e_\alpha, f_\beta] \in (\mathbb{G}^-)_0 \subset \mathbb{S}$.

Essendo quindi $\mathbb{S}$ chiuso rispetto al prodotto di Lie esso e' effettivamente una sottoalgebra di Lie di $\mathbb{G}$; dalla dimostrazione segue anche che esso e' generato dai vettori di radice associati a tutte e sole le radici che hanno proiezione non negativa sul peso massimo, tali cioe' che :

$$(\lambda, \alpha_i) \geq 0$$

Nel caso particolare in cui $(\mathbb{G}^-)_o = \{\underline{0}\}$, cioe' nessun vettore $x_{-\alpha}$ corrispondente a radici negative annichila v_λ, la sottoalgebra $\mathbb{S}$ coincide con la cosiddetta "sottoalgebra di Borel" :

$$\mathbb{B} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{G}$$

in base alle proprieta' dimostrate precedentemente questo avviene quando il peso massimo non e' ortogonale ad alcuna radice semplice positiva.

Consideriamo ora i gruppi di Lie connessi G ed S generati dalle algebre $\mathbb{G}$ ed $\mathbb{S}$ tramite la mappa esponenziale :

$$\exp : \mathbb{G} \longrightarrow G$$

il gruppo S e' un sottogruppo di Lie di G [12] che corrisponde esattamente al sottogruppo di stabilita' per il vettore v .

In termini di rappresentazioni del gruppo G, che indicheremo ancora con T_λ, la matrice associata ad un elemento g del gruppo si ottiene per esponenziazione della matrice corrispondente all'elemento dell'algebra associato a g ; cioe' se $g = \exp(a)$, con $a \in \mathbb{G}$ e se $T_\lambda(a)$ e' la matrice rappresentativa di a si puo' scrivere :

$$T_\lambda(g) = T_\lambda[\exp(a)] = \exp[T_\lambda(a)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [T_\lambda(a)]^k$$

Per quanto riguarda il sottogruppo di stabilita' S potremo affermare che : se $s = \exp(x)$ con $x \in \mathbb{S}$ (cioe' $s \in S$) si ottiene, operando sul vettore di peso massimo :

$$T_\lambda(s) v_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [T_\lambda(x)]^k v_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [\pi(x)]^k v_\lambda =$$

$$T_\lambda(s) v_\lambda = e^{\pi(x)} v_\lambda \qquad \text{(II,2,21)}$$

dove si e' utilizzata la (II,2,20).

Possiamo quindi affermare che ogni elemento del sottogruppo di stabilita' S agisce su v_λ come un fattore moltiplicativo.

§(II,2.d):"Costruzione del set di Stati Coerenti"

Poiche' lo spazio vettoriale complesso V della rappresentazione irriducibile T_λ ha dimensione finita,esso puo' essere dotato,essendo isomorfo a $\mathbb{C}^n$ ($n = \dim V \in \mathbb{N}$) di un prodotto scalare,che lo rende uno spazio di Hilbert.Utilizzeremo quindi, d'ora in poi,la notazione di Dirac per rappresentare gli stati associati ai vettori di V e gli operatori agenti su tali vettori.Indicheremo quindi per esempio con $|\lambda,\mu\rangle$ lo stato associato al vettore peso della rappresentazione considerata, essendo λ il peso massimo e $\mu = \lambda - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \alpha_i$ un qualsiasi peso;il vettore di peso massimo v_λ corrisponde allo stato $|\lambda,\lambda\rangle$.Tale notazione,analoga a quella utilizzata solitamente per gli autostati dell'operatore momento angolare,consente di porre in evidenza la rappresentazione irriducibile alla quale ci si sta riferendo,essendo quest'ultima individuata univocamente dal peso massimo ;osserviamo pero' che in questo caso sia λ che μ non sono dei numeri ma delle forme lineari definite sulla sottoalgebra di Cartan $\mathbb{H}$.

Sia ora $A = \{g \in G \text{ t.c. } \langle\lambda,\lambda|T(g)|\lambda,\lambda\rangle \neq 0\}$.

Per gli elementi di tale insieme possiamo definire gli stati coerenti come segue :

$$|g\rangle = \frac{T_\lambda(g)|\lambda,\lambda\rangle}{\langle\lambda\mu|T_\lambda(g)|\lambda\lambda\rangle} \qquad g \in G\cap A \tag{II,2,22a}$$

Tale definizione dipende solo dalla classe laterale gS, e non dal particolare rappresentante g in essa scelto ; se infatti $g' \in gS$, cioe' se $g' = gs$ con $s \in S$ possiamo scrivere :

$$|g'\rangle = \frac{T_\lambda(g')|\lambda,\lambda\rangle}{\langle\lambda,\lambda|T(g')|\lambda\lambda\rangle} = \frac{T_\lambda(g)\,T_\lambda(s)\,|\lambda,\lambda\rangle}{\langle\lambda,\lambda|\,T_\lambda(g)\,T_\lambda(s)\,|\lambda,\lambda\rangle}$$

Utilizzando inoltre il fatto che $|\lambda,\lambda\rangle$ corrisponde al vettore v_λ di peso massimo e sfruttando la proprieta' (II,2,21) e la linearita' del prodotto scalare e degli operatori si ottiene :

$$|g'\rangle = \frac{e^{\pi(s)}\,T_\lambda(g)\,|\lambda,\lambda\rangle}{e^{\pi(s)}\langle\lambda,\lambda|\,T_\lambda(g)\,|\lambda,\lambda\rangle} = \frac{T_\lambda(g)|\lambda,\lambda\rangle}{\langle\lambda,\lambda|T_\lambda(g)|\lambda,\lambda\rangle} = |g\rangle \qquad \text{(II,2,22b)}$$

Cosi' facendo associamo uno stato coerente ad ogni punto dello spazio omogeneo quoziente G/S, in accordo con la definizione generale di stati coerenti. Osserviamo inoltre che poiche' il sottogruppo S di G contiene il cosiddetto sottogruppo di Borel $B = \exp(\mathcal{B})$ generato dalla sottoalgebra $\mathbb{B} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{G}$, esso e' un sottogruppo "parabolico", lo spazio quoziente G/S e' compatto [16].

Per individuare in modo univoco le coordinate su G/B da associare allo stato coerente $|g\rangle$ conviene utilizzare alcune decomposizioni del gruppo G che possono essere applicate in casi sufficientemente generali : per i gruppi di Lie semisemplici complessi puo' essere sfruttata la "decomposizione di Gauss" [15].

Nel caso in cui G sia il gruppo lineare generale $GL(n,\mathbb{C})$, o un suo sottogruppo classico qualsiasi, tale decomposizione viene fatta come segue. Scelta una base in $\mathbb{C}^n$ (ovviamente si prendera' la base canonica) possiamo rappresentare ogni elemento $g \in G$ del gruppo considerato con una matrice quadrata $(n \times n)$ invertibile. Diremo allora che $g \in G$ e' un "elemento regolare" se, definendo :

$$\Delta_k(g) = \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1k} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{k1} & g_{k2} & \cdots & g_{kk} \end{pmatrix} \qquad k = 1, \ldots, n$$

il minore principale di ordine k della matrice associata a g, si ha :

$$\Delta_k(g) \neq 0 \qquad k = 1, \ldots, n$$

l'insieme G_{reg} degli elementi regolari di G e' connesso, aperto ed ovunque denso in G, mentre il suo complementare $G - G_{reg}$ ha dimensione inferiore rispetto alla dimensione di G [15, pag. 270]. Per gli elementi $g \in G_{reg}$ vale la seguente "decomposizione di Gauss" :

$$g = z^- h z^+ \qquad z \in Z^-, \; h \in H, \; z^+ \in Z^+ \tag{II,2,23}$$

essendo $Z^+ (Z^-)$ ed H i sottogruppi di G costituiti rispettivamente da matrici triangolari alte (basse) aventi elementi diagonali uguali ad 1, e da matrici diagonali ; tale decomposizione e' unica.

E' inoltre possibile scegliere una base nello spazio della rappresentazione in modo tale che $G_{reg} \subset A$,quindi la decomposizione di Gauss e' applicabile a tutti gli elementi g per i quali si puo' definire lo stato coerente (II,2,22a). Osserviamo pero' che $G-A \subset G-G_{reg}$ e pertanto l'insieme G-A,su cui si possono definire gli stati coerenti $|g\rangle$,ha dimensione minore di G.

Nel caso di G generico gruppo di Lie semisemplice complesso vale una decomposizione analoga alla (II,2,23) per un sottoinsieme G_{reg} aperto connesso ed ovunque denso in G ; i sottogruppi corrispondenti Z^-,Z^+,H possono essere posti,in una opportuna rappresentazione,nella forma data per il caso di $GL(n,\mathbb{C})$ e dei suoi sottogruppi classici.

Possiamo associare i sottogruppi Z^-,Z^+,H ad alcune sottoalgebre di $\mathbb{G}$ gia' introdotte precedentemente ; consideriamo infatti la decomposizione (II,2,3b)dell'algebra $\mathbb{G}$:

$$\mathbb{G} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{G}^+ \oplus \mathbb{G}^-$$

e' possibile scegliere una base in $\mathbb{C}^n$ in modo tale che le matrici (nxn) che rappresentano gli elementi di $\mathbb{H},\mathbb{G}^+,\mathbb{G}^-$ siano rispettivamente diagonali e triangolari alte e basse con elementi diagonali nulli.

Poiche' inoltre il prodotto di matrici diagonali e' diagonale, e il prodotto di matrici triangolari e' triangolare dello stesso tipo (ed avendosi zero sulla diagonale in questo caso sono anche matrici nilpotenti) in questa particolare rappresentazione i sottogruppi di Lie associati tramite la "mappa esponenziale" alle sottoalgebre $\mathbb{H}, \mathbb{G}^+, \mathbb{G}^-$ sono le parti connesse con l'identita' di H, Z^+, Z^- e coincidono esattamente con questi ultimi nel caso in cui il gruppo G di partenza sia connesso, si potra' quindi scrivere :

$$H = \exp(\mathbb{H}) \qquad Z^+ = \exp(\mathbb{G}^+) \qquad Z^- = \exp(\mathbb{G}^-).$$

Applicando la decomposizione di Gauss nella definizione (II,2,22b) per gli stati coerenti $|g\rangle$ associati ad elementi regolari, si scrivera' :

$$|g\rangle = \frac{T_\lambda(g)|\lambda,\lambda\rangle}{\langle\lambda,\lambda|T_\lambda(g)|\lambda,\lambda\rangle} = \frac{T_\lambda(z^-)T_\lambda(h)T_\lambda(z^+)|\lambda,\lambda\rangle}{\langle\lambda,\lambda|T_\lambda(z^-)T_\lambda(h)T_\lambda(z^+)|\lambda,\lambda\rangle}$$

sfruttando il fatto che z^+ ed h appartengono al sottogruppo di stabilita' S di v_λ (e quindi dello stato $|\lambda,\lambda\rangle$), e seguendo lo stesso procedimento adottato per ottenere la (II,2,22b) potremo scrivere :

$$|z^-\rangle = |g\rangle = \frac{T_\lambda(z^-)|\lambda,\lambda\rangle}{\langle\lambda,\lambda|T_\lambda(z^-)|\lambda,\lambda\rangle} \qquad z^- \in Z^- = \exp(\mathbb{G}^-) \qquad \text{(II,2,22c)}$$

dove si e' etichettato lo stato coerente con l'elemento del sottogruppo Z .

Osserviamo ora che e' possibile fattorizzare ulteriormente in $z^- \in Z^-$ una parte "di stabilita'" ed una parte "efficace" su $|\lambda,\lambda\rangle$. Consideriamo infatti la sottoalgebra nilpotente $\mathbb{G}^-$, essa puo' essere decomposta come segue :

$$\mathbb{G}^- = \bigoplus_{\alpha\in R^+} \mathbb{G}^{-\alpha} = (\mathbb{G}^-)_0 \oplus (\mathbb{G}^-)_1 \qquad \text{(II,2,24)}$$

essendo $(\mathcal{G}^-)_0$ la sottoalgebra definita precedentemente ed essendo $(\mathcal{G}^-)_1$ lo spazio vettoriale definito dalla stessa (II,2,24). Una base per $(\mathcal{G}^-)_1$ e' costituita da vettori di tipo f_α con α tale che $(\lambda,\alpha)>0$ (essendo α una radice positiva).

Da questa osservazione seguono alcune proprieta' del sottospazio $(\mathcal{G}^-)_1$:

i) $(\mathcal{G}^-)_1$ e' una sottoalgebra di $\mathcal{G}^-$, cioe'

$$[(\mathcal{G}^-)_1,(\mathcal{G}^-)_1] \subset (\mathcal{G}^-)_1$$

Bastera' verificare queste relazioni per i vettori f_α della base ; se f_α e f_β sono due di tali vettori (cio' significa $(\lambda,\alpha)>0$, $(\lambda,\beta)>0$) il prodotto di Lie $[f_\alpha,f_\beta]$ e' nullo, nel qual caso appartiene ovviamente al sottospazio $(\mathcal{G}^-)_1$, oppure e' un vettore $x_{-(\alpha+\beta)} \in \mathcal{G}^{-(\alpha+\beta)}$.

Osserviamo ora che la radice $(\alpha+\beta)$ e' non ortogonale a λ , infatti :

$$(\lambda,\alpha+\beta) = (\lambda,\alpha)+(\lambda,\beta) > 0$$

la disuguaglianza e' vera perche' vale per ognuno dei due addendi, questo comporta ovviamente che $[f_\alpha,f_\beta] \in (\mathcal{G}^-)_1$.

ii) $(\mathcal{G}^-)_1$ e' un ideale di $\mathcal{G}^-$, cioe' $[\mathcal{G}^-,(\mathcal{G}^-)_1] \subset (\mathcal{G}^-)_1$.

Decomponendo la $\mathcal{G}^-$ secondo le (II,2,24) possiamo scrivere :

$$[\mathcal{G}^-,(\mathcal{G}^-)_1] = [(\mathcal{G}^-)_0,(\mathcal{G}^-)_1] + [(\mathcal{G}^-)_1,(\mathcal{G}^-)_1]$$

sfruttando la proprieta' i) bastera' mostrare che ;

$$[(\mathcal{G}^-)_0,(\mathcal{G}^-)_1] \subset (\mathcal{G}^-)_1$$

utilizzando ancora una volta i vettori di base f_α e ripercorrendo il procedimento utilizzato nella dimostrazione della i) e' sufficiente che si abbia $(\lambda, \alpha+\beta)\neq 0$, essendo pero' questa volta $(\lambda, \alpha)=0$ e $(\lambda, \beta)>0$.

calcolando quindi il prodotto scalare otteniamo :

$$(\lambda, \alpha+\beta) = (\lambda, \alpha) + (\lambda, \beta) = (\lambda, \beta) > 0$$

che dimostra l'asserto.

iii) In virtu' della decomposizione di $\mathbb{G}^-$ in somma diretta degli spazi vettoriali $(\mathbb{G}^-)_0$, $(\mathbb{G}^-)_1$ si ottiene anche $(\mathbb{G}^-)_0 \cap (\mathbb{G}^-)_1 = \{\underline{0}\}$.

Grazie alle proprieta' dimostrate siamo in grado di applicare una proposizione che consente di decomporre il sottogruppo Z .
Sia T un gruppo di Lie semplicemente connesso e sia $\mathbb{T}$ la corrispondente sottoalgebra ; siano $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{M}$ sottoalgebre di $\mathbb{T}$ tali che : (1) $\mathbb{L}$ e' ideale di $\mathbb{T}$; (2) $\mathbb{T} = \mathbb{L} + \mathbb{M}$; (3) $\mathbb{L}\cap\mathbb{M} = \{\underline{0}\}$.
Siano quindi L,M i sottogruppi di T corrispondenti alle sottoalgebre $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{M}$ allora : (1) L,M sono semplicemente connessi ; (2) T = LM ; (3) $L\cap M = \{e\}$ [15, pag 553].
Facendo le seguenti identificazioni :

$$\mathbb{T} = \mathbb{G}^- \quad (T = Z^-) \qquad \mathbb{L} = (\mathbb{G}^-)_1 \qquad \mathbb{M} = (\mathbb{G}^-)_0$$

ed utilizzando le proprieta' i),ii),iii) dimostrate precedentemente possiamo applicare la decomposizione e decomporre un qualsiasi elemento $z^- \in Z^-$ come segue :

$$z^- = \zeta\omega \qquad \omega = \exp(w) \quad w \in (\mathbb{G}^-)_0$$
$$\zeta = \exp(y) \quad y \in (\mathbb{G}^-)_1$$

Tornando alla definizione di stato coerente (II,2,24),utilizzando la decomposizione $z^- = \zeta\omega$ ed osservando che $\omega = \exp(w) \in S$ e' un elemento del sottogruppo di stabilita' di v_1 si ottiene :

$$|\zeta\rangle = |z^-\rangle = \frac{T_1(\zeta)|1,\lambda\rangle}{\langle 1,\lambda|T_1(\zeta)|1,\lambda\rangle}$$

$$\zeta = \exp(y) \qquad y \in (\mathbb{G}^-)_1 \qquad \text{(II,2,22d)}$$

La formula (II,2,22d) mostra che i punti dello spazio omogeneo quoziente sono ottenuti esponenziando la sottoalgebra $(\mathbb{G}^-)_1$. In generale i punti di un generico spazio quoziente T/L (T e L gruppi di Lie) si ottengono esponenziando il sottospazio $\mathbb{M}$ definito da $\mathbb{T}=\mathbb{M}+\mathbb{L}$ essendo $\mathbb{T}$ ed $\mathbb{L}$ le algebre di Lie di T e L [17]. Piu' precisamente in questo modo non si ottiene tutto lo spazio quoziente T/L ma un intorno aperto connesso del punto corrispondente alla classe laterale data dal sottogruppo L : si puo' passare ad un qualunque altro aperto operando con il gruppo T che e' transitivo su T/L.Con la decomposizione abbiamo visto che l'aperto ottenuto con l'esponenziazione suddetta e' denso in T/L ; i punti non compresi in tale aperto sono quelli che corrispondono a classi laterali costituite di elementi tutti non regolari,l'insieme dei quali ha misura nulla.Infatti ad ogni punto non regolare x dello spazio quoziente corrisponde una sottovarieta' $p^{-1}(x)=\bar{g}L$ ($\bar{g}$ elemento non regolare della classe laterale) la quale ha dimensione uguale a dim(L) . Percio' la dimensione del sottoinsieme dei punti non regolari di T/L e' uguale a :

$$\dim(T-T_{reg})-\dim(L) < \dim(T)-\dim(L) = \dim(T/L)$$

e la misura di tale sottoinsieme e' nulla.

Cio' implica che l'aperto ottenuto esponenziando $\mathbb{M}$ e' idoneo al calcolo di integrali sullo spazio quoziente.

Nel nostro caso $\mathbb{M}$ e' la sottoalgebra $(\mathbb{G}^-)_1$ che e' complessa ed e' isomorfa a $\mathbb{C}^N$ come spazio vettoriale $N=\dim[(\mathbb{G}^-)_1]$.

In tal modo abbiamo costruito una carta complessa per lo spazio quoziente sulla quale sara' possibile fare calcoli espliciti in coordinate.

Si noti che il fatto che i punti dello spazio quoziente siano ottenuti esponenziando una sottoalgebra non significa che lo spazio quoziente sia isomorfo ad un gruppo di Lie, in quanto l'esponenziazione, come gia' detto, non puo' essere operata globalmente.

§(II,3):"Stati Coerenti di Gruppi di Lie reali semisemplici compatti"

§(II,3.a):"Forme reali di Algebre di Lie semisemplici complesse"

Nella trattazione degli stati coerenti di algebre di Lie semisemplici abbiamo richiesto che la rappresentazione T dell'algebra $\mathfrak{G}$ (e quindi quella del gruppo corrispondente) fosse irriducubile. D'altro canto gli operatori utilizzati in fisica sono operatori unitari e tale dovra' quindi essere la rappresentazione di G se vorremo associare allo spazio della rappresentazione il significato di spazio degli stati del sistema. Per tale motivo e' opportuno considerare gruppi di Lie compatti (come spazi topologici) : ogni rappresentazione continua di un gruppo compatto su uno spazio di dimensione finita, dotato di prodotto scalare ("spazio prehilbertiano") e' infatti equivalente ad una rappresentazione unitaria continua [15,pag203]. E' comunque possibile costruire rappresentazioni irriducibili unitarie anche per gruppi non compatti (in generale di dimensione "numerabile" o addirittura "continua" [18]) ed una di queste verra' esaminata in dettaglio nel prossimo capitolo. Dato un gruppo di Lie semisemplice complesso e connesso e' possibile costruire un sottogruppo di Lie semisemplice compatto (reale), che viene detto "forma reale compatta del gruppo" [15,pag 583]. Se inoltre T e' una rappresentazione irriducibile del gruppo complesso di partenza, la sua restrizione alla forma reale e' ancora irriducibile, e se la forma reale e' compatta puo' essere considerata la rappresentazione unitaria irriducibile equivalente.

La costruzione esplicita della forma reale compatta di un generico gruppo di Lie semisemplice complesso si fa sfruttando la corrispondente algebra di Lie $\mathbb{G}$.

Sia $\mathbb{G}$ un'algebra di Lie semisemplice complessa; essa e' pensabile come algebra di Lie reale di dimensione reale doppia rispetto alla dimensione complessa : indicheremo con $\mathbb{G}^{\mathbb{R}}$ questa struttura e la chiameremo "realificazione di $\mathbb{G}$" : avremo quindi per le dimensioni :

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{G}^{\mathbb{R}}) = 2\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{G})$$

Se $\mathbb{G}_0 \subset \mathbb{G}$ e' una sottoalgebra reale di $\mathbb{G}^{\mathbb{R}}$ tale che :

$$\mathbb{G}^{\mathbb{R}} = \mathbb{G}_0 \oplus i\mathbb{G}_0 \qquad (II,3,1)$$

allora $\mathbb{G}_0$ e' detta "forma reale di $\mathbb{G}$", ovviamente si ha :

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{G}_0) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{G})$$

Ogni algebra di Lie reale semplice e' una realificazione o una forma reale di un'algebra di Lie semplice complessa ; va pero' notato che la forma reale di un'algebra di Lie semisemplice complessa non e' unica. Se $\mathbb{G}_0$ e' una forma reale di $\mathbb{G}$ essa si dice "forma reale compatta" se e' un'algebra di Lie di un gruppo di Lie compatto. Indicheremo, d'ora innanzi, con $\mathbb{G}_0$ la (unica) forma reale compatta di $\mathbb{G}$ e con $\mathbb{G}_{\mathbb{R}}$ una qualsiasi forma reale.Una equivalente caratterizzazione della compattezza di una forma reale utilizza la forma di Killing.Valgono infatti i seguenti risultati :

i) La forma di Killing B di $\mathbb{G}_0$ coincide con la restrizione della forma di Killing B di $\mathbb{G}$.

ii) La forma reale $\mathbb{G}_{\mathbb{R}}$ e' compatta se e solo se la sua forma di Killing e' definita negativa.

La forma reale compatta di un'algebra di Lie complessa semisemplice e' unica (a meno di automorfismi),ed ogni altra forma reale di $\mathbb{G}$ si ottiene dalla $\mathbb{G}_0$ utilizzando un automorfismo involutorio di $\mathbb{G}_0$,cioe' un'applicazione $S_0 : \mathbb{G}_0 \longrightarrow \mathbb{G}_0$ per la quale valga la proprieta' $S_0{}^2=I$.Il metodo con cui tale forma reale si costruisce e' il seguente :

i) Si estende l'automorfismo S_0 a tutta l'algebra $\mathbb{G}^{\mathbb{R}} = \mathbb{G}_0 \oplus i\mathbb{G}_0$ come segue :

$$S : G^{\mathbb{R}} \longrightarrow G^{\mathbb{R}}$$

$$S(x+iy) = S(x)-iS(y)$$

(la definizione ha senso perche' $x,y \in \mathbb{G}_0$ e quindi $S_0(x)$, $S_0(y) \in \mathbb{G}$)

ii) Si considerano gli "autospazi" dell'operatore S_0 (essendo $S_0{}^2=I$ gli autovalori possono essere solamente ± 1) e si decompone $\mathbb{G}_0$ come somma diretta dei due autospazi :

$$\mathbb{G}_0 = (\mathbb{G}_0^{+1}) + (\mathbb{G}_0^{-1})$$

iii) L'insieme definito da :

$$\mathbb{G}_{\mathbb{R}} = (\mathbb{G}_0^{+1}) + i(\mathbb{G}_0^{-1}) \qquad (II,3,2)$$

e' una sottoalgebra reale di $\mathbb{G}^{\mathbb{R}}$ e $\mathbb{G}^{\mathbb{R}} = \mathbb{G}_{\mathbb{R}} \oplus i\mathbb{G}_{\mathbb{R}}$,quindi $\mathbb{G}_{\mathbb{R}}$ e' una forma reale di $\mathbb{G}$.

E' allora evidente l'importanza della determinazione delle forme reale compatta di un'algebra di Lie semisemplice G,che si costruisce in modo estremamente semplice a partire dalla base di Chevalley (II,2,8) di $\mathbb{G}$.Se infatti normalizziamo e_α ed f_α in modo tale che sia $B(e_\alpha, f_\alpha)=1$ allora i vettori :

$$ih_\alpha \quad ; \quad i(e_\alpha + f_\alpha) \quad ; \quad (e_\alpha - f_\alpha) \qquad (II,3,3)$$

costituiscono una base per la forma reale compatta $\mathbb{G}_0$ di $\mathbb{G}$ essendo la h_α definita dalla (II,2,5).

§(II,3.b):"Costruzione del set di Stati Coerenti"

Sia G_0 un gruppo di Lie compatto semisemplice e sia $\mathbb{G}_0$ la sua algebra di Lie,$\mathbb{G}_0$ e' la forma compatta dell'algebra di Lie complessa semisemplice $\mathbb{G} = \mathbb{G}_0 \oplus i\mathbb{G}_0$ .Sia U(g) una rappresentazione unitaria irriducibile di G su uno spazio di Hilbert V di dimensione finita (dimV=n).Scegliendo in V una base ortonormale le matrici della rappresentazione U di G sono unitarie [15,pag 59] (cioe' $(U(g^{-1}))_{ij} = (U(g)_{ji})^*$).
Alla U e' associata una rappresentazione irriducibile dell'algebra $\mathbb{G}_0$ di G_0 ;essa e' costituita di matrici antihermitiane a traccia nulla.Cioe',se indichiamo con $A(x)$ la matrice corrispondente all'elemento $x \in \mathbb{G}$,si ha:

$$A_{ij}^*(x) = -A_{ji}(x) \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n} A_{ii}(x)=0$$

Per ottenere il set di stati coerenti del gruppo G_0 conviene estendere la rappresentazione U di G_0 ad una rappresentazione (irriducibile) olomorfa della complessificazione $\mathbb{G}=\mathbb{G}_0\oplus i\mathbb{G}_0$ di $\mathbb{G}_0$ alla quale e' associato il peso massimo λ .Detto $|\lambda,\lambda\rangle$ il vettore di peso massimo potremo definire il set di stati coerenti in modo analogo a quanto fatto precedentemente :

$$|g\rangle = \frac{U(g)|\lambda,\lambda\rangle}{\langle\lambda,\lambda|U(g)|\lambda,\lambda\rangle} \qquad g\in A_0 \qquad \text{(II,3,4)}$$

essendo $A_0 = A\cap G_0 = \{g\in G_0 \text{ t.c.} \langle\lambda,\lambda|U(g)|\lambda,\lambda\rangle\neq 0\}$.
Anche in questo caso la definizione dipende dalla sola classe laterale in G_0/S_0 essendo $S_0 = \{s\in G_0 \text{ t.c. } U(s)|\lambda,\lambda\rangle = e^{i\pi(s)}|\lambda,\lambda\rangle \ \pi(s)\in\mathbb{R}\} = G_0\cap S$ dove S e' il sottogruppo di stabilita' di $G = \exp(\mathbb{G})$ per la rappresentazione considerata. Osserviamo [16] che lo spazio omogeneo G_0/S_0 coincide con G/S e pertanto e' una varieta' complessa (e,per quanto affermato in precedenza,compatta).
In analogia con quanto fatto per gli stati di Glauber (§(I,2): proprieta' v)) e' possibile dare una rappresentazione di G su uno spazio di funzioni analitiche definite sulla varieta' complessa G_0/S_0 utilizzando il sistema di stati coerenti. Questo spazio di funzioni e' una generalizzazione dello spazio di Fock-Bargmann.
Associamo ad ogni vettore $|\psi\rangle\in V$ una funzione cosi' definita :

$$\tilde{\psi}(g) = \frac{\langle\lambda,\lambda|U^{+}(g)|\psi\rangle}{\langle\lambda,\lambda|U^{+}(g)|\lambda,\lambda\rangle} = \langle g|\psi\rangle \qquad g\in G_0\cap A_0 \qquad \text{(II,3,5)}$$

In modo analogo a quanto fatto per l'espressione (II,2,22b) si dimostra banalmente che questa funzione dipende solo dalla classe laterale gS_0 e non dal particolare rappresentante in essa scelto. Se indichiamo con p la proiezione che associa ad ogni elemento g del gruppo la sua classe laterale gS_0 la (II,3,5) definisce una funzione analitica in $p(G_0 \cap A_0)$. Infatti essa e' la composizione di funzioni analitiche

$$(A_0 \cap G_0) \times V \xrightarrow{\frac{U^+(g)|\psi\rangle}{\langle\lambda\lambda|U^+(g)|\lambda,\lambda\rangle}} V \xrightarrow{\frac{\langle\lambda,\lambda|U^+(g)|\psi\rangle}{\langle\lambda\lambda|U^+(g)|\lambda,\lambda\rangle}} \mathbb{C}$$

essendo la rappresentazione unitaria e il prodotto scalare entrambe funzioni analitiche.

In particolare, scegliendo una base ortonormale $\{|i\rangle, i=1,\dots,n\}$ per lo spazio V potremo considerare le funzioni associate ai vettori $|i\rangle$:

$$\tilde{u}_i(g) = \langle g|i\rangle \qquad g \in G_0 \cap A_0$$

sfruttando la proprieta' di linearita' del prodotto scalare e' semplice mostrare che, se $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \, |i\rangle$ $(\psi_i = \langle i|\psi\rangle)$ e' un vettore generico di V si ha :

$$\tilde{\psi}(g) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \, \tilde{u}_i(g)$$

Vogliamo ora esprimere il prodotto scalare di due stati arbitrari di V utilizzando le funzioni $\tilde{\psi}(g)$ definite.

A tal fine e' necessario applicare la seguente relazione :

$$\int_{G_0} \langle\psi_1|U(g)|\psi_2\rangle^* \langle\psi_3|U(g)|\psi_4\rangle \, dg = d_\lambda^{-1} \langle\psi_3|\psi_1\rangle\langle\psi_2|\psi_4\rangle \qquad \text{(II,3,6)}$$

dove d_λ e' la dimensione di V ed essendo dg la "misura invariante" del gruppo [12,pag 272] (la dimostrazione della (II,3,6a) sara' data nell'appendice).

Ponendo nella (II,3,6a) $|\psi_2\rangle = |\psi_4\rangle = |\lambda,\lambda\rangle$ otteniamo :

$$\langle\psi_3|\psi_1\rangle = \frac{d_\lambda}{\langle\lambda,\lambda|\lambda,\lambda\rangle}\int_{G_0}\langle\psi_1|U(g)|\lambda,\lambda\rangle^*\langle\psi_3|U(g)|\lambda,\lambda\rangle\, dg =$$

$$= d_\lambda\int_{G_0}\langle\lambda,\lambda|U^+(g)|\psi_3\rangle^*\langle\lambda,\lambda|U^+(g)|\psi_1\rangle\, dg \qquad \text{(II,3,6b)}$$

dove si e' supposto lo stato $|\lambda,\lambda\rangle$ normalizzato e si e' fatto uso della proprieta' dell'operatore unitario U(g) :

$$\langle\phi_1|U(g)|\phi_2\rangle = \langle U^+(g)\phi_1|\phi_2\rangle = \langle\phi_2|U(g)\phi_1\rangle^*$$

Ricordando la definizione (II,3,5) avremo :

$$\langle\psi_3|\psi_1\rangle = d_\lambda\int_{G_0}\tilde{\psi}_3^*(g)\,\psi_1(g)\,\|\langle\lambda,\lambda|U(g)|\lambda,\lambda\rangle\|^2 dg$$

Il dominio A_0 di definizione delle funzioni $\tilde{\psi}$ coincide con G_0 a meno di un insieme di misura nulla ; infatti,come gia' detto precedentemente,$(G-A_0) \subset (G-G_{reg})$ che e' una varieta' di dimensione inferiore di G_0 e percio' ha misura nulla ; di conseguenza gli integrali calcolati su G_0 o su A_0 coincidono.

La funzione integranda dipende dal solo coset gS_0 e non dal rappresentante scelto sul gruppo;questo e' infatti vero per le $\tilde{\psi}_3$, $\tilde{\psi}_1$,come e' gia' stato fatto notare precedentemente, se inoltre $g'=gS_0$ e' un altro elemento di gS_0 avremo:

$$\|\langle\lambda,\lambda|U(g')|\lambda,\lambda\rangle\|^2 = \langle\lambda,\lambda|U(g)U(s)|\lambda,\lambda\rangle^*\langle\lambda,\lambda|U(g)U(s)|\lambda,\lambda\rangle.$$

poiche' S_0 e' il sottogruppo di stabilita' di $|\lambda,\lambda\rangle$ e poiche' la U e' una rappresentazione unitaria si avra' :

$$U(s)|\lambda,\lambda\rangle = e^{i\pi(s)}|\lambda,\lambda\rangle \qquad \pi(s)\in\mathbb{R}$$

e quindi :

$$\|\langle\lambda,\lambda|U(g')|\lambda,\lambda\rangle\|^2 = e^{-i\pi(s)}\langle\lambda,\lambda|U(g)|\lambda,\lambda\rangle^* e^{i\pi(s)}\langle\lambda,\lambda,U(g)\lambda,\lambda\rangle =$$
$$= \|\langle\lambda,\lambda|U(g)|\lambda,\lambda\rangle\|^2$$

Indicheremo allora con w un parametro (in generale $w\in\mathbb{C}^m$) che individua i punti di G_0/S_0 e porremo, per gli stati coerenti e per le funzioni $\tilde{\psi}$ precedentemente definite :

$$|w\rangle = |g\rangle \qquad \text{(II,3,4b)}$$

$$\psi(w) = \tilde{\psi}(g) = \langle w|\psi\rangle \qquad \text{(II,3,5b)}$$

essendo w l'etichetta corrispondente alla classe laterale di g.

$$w = gS_0$$

Una tale notazione potra' essere utilizzata anche per gli operatori U quando essi sono applicati al vettore $|\lambda,\lambda\rangle$ in modo tale che l'espressione che si ottiene e' funzione del solo parametro w.

Ponendo quindi, con quest'ultima convenzione :

$$f(w^*,w) = \lg\|\langle\lambda,\lambda|U(w)|\lambda,\lambda\rangle\|^{-2} = \lg\|\langle\lambda,\lambda|U(g)|\lambda,\lambda\rangle\|^{-2} \qquad \text{(II,3,7)}$$

considereremo l'integrale sullo spazio fattore G_0/S_0 e scriveremo :

$$\langle\psi_3|\psi_2\rangle = d_\lambda \int_{G_0/S_0} d\dot{w}\, e^{-f(w^*,w)}\, \psi_3^*(w)\,\psi_1(w) \qquad \text{(II,3,6c)}$$

dove $d\dot{w}$ e' la misura invariante definita sulla varieta'

G_o/S_o indotta dalla misura dg definita sul gruppo ; una tale misura esiste perche' il gruppo e' compatto [17].

Osserviamo inoltre che, essendo U una rappresentazione unitaria si avra' $\|\langle \lambda,\lambda|U(w)|\lambda,\lambda\rangle\|^2 = \|\langle\lambda,\lambda|w\rangle\|^2 < 1$ e quindi $f(w^*,w) > 0$.

Introducendo su G_o/S_o una nuova misura cosi' definita :

$$d\mu(w) = d_\lambda\, e^{-f(w^*,w)}\, d\mathring{w} \qquad (II,3,8)$$

potremo scrivere in modo "standard" il prodotto scalare tra gli stati ψ_1, ψ_2 :

$$(\psi_1;\psi_2) = \int_{G_0/S_0} d\mu(w)\, \psi_1^*(w)\, \psi_2(w)$$

e si potra' affermare che lo spazio vettoriale (di Hilbert) V della rappresentazione e' isomorfo allo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ delle funzioni analitiche in G_o/S_o per le quali si ha :

$$\int_{G_0/S_0} d\mu(w)\, \|\psi(w)\|^2 < +\infty$$

In particolare, alla funzione $\psi(w)$ $\mathcal{H}$ associeremo il vettore :

$$|\psi\rangle = \int_{G_0/S_0} d\mu(w)\, |w\rangle\, \psi(w)$$

le cui componenti sulla base ortonormale $|i\rangle$ sono date da :

$$\psi_i = \langle i|\psi\rangle = \int_{G_0/S_0} d\mu(w)\, u_i^*(w)\psi(w).$$

La rappresentazione di G su questo spazio H e' estremamente semplice ; la funzione associata allo stato $U(g\ )|\psi\rangle$ sara' infatti data da :

$$\psi_{g_0}(w) = \langle w|U(g_0)|\psi\rangle = \frac{\langle\lambda,\lambda|U^+(g)\,U(g_0)|\psi\rangle}{\langle\lambda,\lambda|U^+(g)|\lambda,\lambda\rangle} \qquad w = g\,S_0$$

Sfruttando le proprieta' di composizione degli operatori e la unitarieta' degli stessi otteniamo :

$$\psi_{g_0}(w) = \frac{\langle\lambda,\lambda| U^+(g_0^{-1}g)|\psi\rangle}{\langle\lambda,\lambda| U^+(g)|\lambda,\lambda\rangle} = \frac{\langle\lambda,\lambda| U^+(g_0^{-1}g)|\psi\rangle}{\langle\lambda,\lambda| U^+(g_0^{-1}g)|\lambda,\lambda\rangle} \cdot \frac{\langle\lambda,\lambda| U^+(g_0^{-1}g)|\lambda,\lambda\rangle}{\langle\lambda,\lambda| U^+(g)|\lambda,\lambda\rangle} =$$

$$= \langle g_0^{-1}w|\psi\rangle\, \tilde{\mu}(g_0,g)$$

dove il "prodotto" tra un elemento h del gruppo con un elemento di G_0/S_0 indica l'azione di G_0 sullo spazio omogeneo , compatibile con la sua struttura di spazio quoziente :

$$g'w = g'gS_0 = (g'g)S_0 \qquad w_0 = gS_0$$

e dove abbiamo posto :

$$\tilde{\mu}(g_0,g) = \frac{\langle\lambda,\lambda| U^+(g_0^{-1}g)|\lambda,\lambda\rangle}{\langle\lambda,\lambda| U^+(g)|\lambda,\lambda\rangle}$$

Anche in quest'ultimo caso e' immediato verificare che la funzione $\tilde{\mu}$ dipende (rispetto alla variabile g) dalla sola classe gS_0 ;scriveremo quindi :

$$\mu(g_0,w) = \tilde{\mu}(g_0,g) \qquad w = gS_0$$

essendo μ una funzione olomorfa sulle variabili g_0 e w in $G_0 \times p(G_0 \cap A_0)$.

Indicando ancora con U la rappresentazione di G_0 sullo spazio di Fock-Bargmann generalizzato si scrive esplicitamente :

$$(\mathcal{U}(g_0)\psi)(w) = \mu(g_0,w)\,\psi(g_0^{-1}w)$$

Sulla varieta' degli stati coerenti G_0/S_0 si puo' introdurre una struttura Kähleriana , ovvero la varieta' e' complessa ed é dotata di una metrica hermitiana associata ad una 2-forma fondamentale chiusa [19].

Si dimostra che se $F : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ e' definita positiva allora ad essa e' associata la metrica Kähleriana cosi' definita :

$$ds^2 = 2 \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\bar\beta}\, dw^\alpha dw^{*\beta}$$

dove :

$$g_{\alpha\bar\beta} = \frac{\partial^2 F}{\partial w^\alpha \partial w^{*\beta}} \qquad \text{(II,3,9)}$$

e la 2-forma fondamentale si scrive :

$$\phi = -i2 \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\bar\beta}\, dw^\alpha \wedge dw^{*\beta} \qquad \text{(II,3,10)}$$

L'elemento di volume di G_o/S_o indotto dalla struttura Kähleriana si specializza come segue :

$$dV = i^{n^2} \det(g_{\alpha\bar\beta})\, dw^1 \wedge .. \wedge dw^n \wedge dw^{*1} \wedge .. \wedge dw^{*n} \qquad \text{(II,3,11a)}$$

Nel calcolo di integrali sullo spazio omogeneo (compatto) abbiamo utilizzato l'elemento di volume (II,3,11a) normalizzato con il requisito :

$$\int_{G_o/S_o} d\overset{\circ}{w} = 1 \qquad \text{(II,3,11b)}$$

La scelta della funzione F e' arbitraria e ad ogni varietá si possono sovraimporre infinite strutture Kähleriane.La necessitá di una particolare struttura Kähleriana discende dalla natura fisica dello spazio omogeneo,il quale é interpretato come spazio delle fasi di un sistema classico corrispondente al sistema quantistico assegnato con lo spazio di Hilbert e l'Hamiltoniana. Come si vedra' in seguito [§(II,4)] la funzione F che da' la corretta struttura Kähleriana é :

$$F = -\lg \| \langle \lambda, \lambda | U(w) | \lambda \lambda \rangle \|^2 \qquad (II,3,13)$$

In ultimo osserviamo che gli spazi omogenei degli stati coerenti sono riduttivi [19, pag 190]. Si definisce riduttivo lo spazio omogeneo T/L se l'algebra di Lie $\mathbb{T}$ di T e' decomposta come segue :

$$\mathbb{T} = \mathbb{M} \oplus \mathbb{L} \qquad (\mathbb{L} = \text{algebra di Lie di } L)$$

$$[\mathbb{M}, \mathbb{L}] \subset \mathbb{M} \qquad (II,3,14)$$

Nel nostro caso $\mathbb{T} = \mathbb{G}_0 = \mathbb{S}_0 \oplus \mathbb{M}$

$\mathbb{M}$ é lo spazio vettoriale (non é una sottoalgebra) generato da :

$$i(e_\alpha + f_\alpha) \qquad (e_\alpha - f_\alpha) \qquad (\lambda, \alpha) \neq 0$$

La relazione (II,3,14) é ovviamente verificata poiché prodotti di Lie di vettori di radice non ortogonali ortogonali al peso massimo con vettori di radice ortogonali con l'algebra di Cartan danno ancora vettori di radici non ortogonali.
Se inoltre vale la relazione :

$$[\mathbb{M}, \mathbb{M}] \subset \mathbb{L} \qquad (II,3,15)$$

allora lo spazio omogeneo e' simmetrico [19] ovvero per ogni punto dello spazio esiste un'isometria che capovolge tutte le geodetiche attraverso il punto. In generale la relazione (II,3,14) non é soddisfatta dagli spazi omogenei degli stati coerenti.

§(II,3.c):"Proprieta' degli Stati Coerenti generalizzati di Gruppi di Lie semisemplici compatti"

Siamo ora in grado di enunciare, anche per gli stati coerenti generalizzati di algebre di Lie semisemplici reali compatte, alcune proprieta' analoghe a quelle degli stati di Glauber.

i) Possiamo esprimere in forma generale il prodotto scalare tra due stati coerenti generalizzati, osservando che anche in questo caso non sono stati ortogonali :

$$\langle w, v\rangle = \frac{\langle\lambda,\lambda|\,U^{+}(w)\,U(v)\,|\lambda,\lambda\rangle}{\langle\lambda,\lambda|\,U^{+}(w)\,|\lambda,\lambda\rangle\langle\lambda,\lambda|\,U^{+}(w)\,|\lambda,\lambda\rangle} = \frac{\langle\lambda,\lambda|\,U^{+}(w^{-1}v)\,|\lambda,\lambda\rangle}{\langle\lambda\lambda|\,U(w)\,|\lambda\lambda\rangle^{*}\langle\lambda,\lambda|\,U(v)\,|\lambda,\lambda\rangle} =$$

$$= \mathfrak{F}(w^{+}, v) \qquad \text{(II,3,16)}$$

si e' qui utilizzata la convenzione stabilita nelle precedenti pagine per etichettare con i punti di G_0/S_0 gli stati coerenti e gli operatori U agenti sui $|\lambda,\lambda\rangle$.

ii) Dall'espressione (II,3,6b) del prodotto scalare di due stati arbitrari e ponendo, per esempio $|\psi_1\rangle=|i\rangle$, $|\psi_2\rangle=|j\rangle$ dove l'insieme $[|i\rangle, i=1,\dots,n]$ costituisce una base ortonormale per V si ottiene :

$$\delta_{ij} = \langle i|j\rangle = d_\lambda \int_{G_0} \langle i|\,U(g)\,|\lambda,\lambda\rangle\langle\lambda,\lambda|\,U^{+}(g)\,|j\rangle\, dg$$

che ci consente di scrivere la "risoluzione dell'identita'" in termini di stati coerenti generalizzati; ricordando le definizioni (II,3,4a),(II,3,4b),(II,3,7),(II,3,8) scriveremo :

$$\hat{I} = d_\lambda \int_{G_0/S_0} |w\rangle\langle w|\ \|\langle\lambda,\lambda|\,U(w)\,|\lambda,\lambda\rangle\|^2\, d\dot{w}$$

$$= d_1 \int_{G_0/S_0} d\dot{w}\, e^{-f(w^*,w)} |w\rangle\langle w| = \int_{G_0/S_0} d\mu(w) |w\rangle\langle w| \qquad (II,3,17)$$

iii) Utilizzando il prodotto scalare tra due stati coerenti possiamo introdurre un "kernel" nell'integrale anche per la varieta' complessa G_0/S_0 ; se infatti $|w\rangle, |v\rangle$ sono due stati coerenti si ha (II,2,16) per definizione :

$$\langle w|v\rangle = \mathfrak{J}(w^*,v)$$

d'altro canto, introducendo l'operatore identitá possiamo anche porre :

$$\langle w|v\rangle = \langle w|I|v\rangle = \int_{G_0/S_0} d\mu(z)\langle w|z\rangle\langle z|v\rangle =$$

$$= \int_{G_0/S_0} d\mu(z)\, \mathfrak{J}(w^*,z)\, \mathfrak{J}(z^*,v)$$

confrontando le espressioni ottenute, si ha l'identitá :

$$\mathfrak{J}(w^*,v) = \int_{G_0/S_0} d\mu(z)\, \mathfrak{J}(w^*,z)\, \mathfrak{J}(z^*,v)$$

grazie alla quale si puo' affermare che la $\mathfrak{J}(w^*,w)$ e' un "kernel autoriproducentesi" per lo spazio G_0/S_0 con la misura $d\mu(z)$.

Come nel caso degli stati di Glauber osserviamo che anche per gli stati coerenti generalizzati la funzione $\mathfrak{J}(v^*,w)$ si comporta come una $\delta(w-v)$, infatti possiamo scrivere, per un generico stato $|f\rangle \in V$:

$$f(v) = \langle v|f\rangle = \tilde{f}(g) \quad ; \quad v=gS \in G_0/S_0$$

sfruttando la risoluzione dell'identitá e la (II,3,16) :

$$f(v)=\langle v|f\rangle = \int_{G_0/S_0} d\mu(w)\langle v|w\rangle\langle w|f\rangle = \int_{G_0/S_0} d\mu(w)\, \mathfrak{J}(v^*,w) f(w)$$

§ (II,4): "Dinamica degli Stati Coerenti generalizzati"

Gli stati coerenti generalizzati possono essere convenientemente utilizzati per sviluppare la descrizione quantistica di di alcuni sistemi con il "path integral", calcolato nello spazio su cui gli stati coerenti sono definiti, interpretato come spazio delle fasi "classico" [20].

Consideriamo il propagatore tra due stati arbitrari $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$:

$$K_{21}(t'',t') = \langle\psi_2| \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t''-t')\right\}|\psi_1\rangle$$

grazie alla risoluzione dell'identitá (II,3,17) esso puó essere espresso in termini di propagatore tra stati coerenti :

$$K_{21}(t'',t') = \iint d\mu(w'')\, d\mu(w') \langle\psi_2|w''\rangle\langle w'|\psi_1\rangle\langle w''|\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t''-t')\right\}|w'\rangle =$$

$$= \iint d\mu(w'')\, d\mu(w')\ \psi_2^*(w'')\,\psi_1(w')\, k(w'',t'',w',t')$$

si sono qui introdotte le funzioni ψ_i associate agli stati $|\psi_i\rangle$ e si é definito il propagatore tra due stati coerenti :

$$k(w'',t'',w't') = \langle w''|\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t''-t')\right\}|w'\rangle \qquad \text{(II,4,1)}$$

Dividiamo nella (II,4,1) l'intervallo di tempo (t"-t') in N parti uguali di ampiezza $\varepsilon = (1/N)(t''-t')$ ed inseriamo (N-1) volte la risoluzione dell'identita' ; facendo infine il limite per $N \to \infty$ scriveremo :

$$k(w''t'',w't') = \lim_{N\to\infty}\int\cdots\int \prod_{k=1}^{N-1} d\mu(w_k) \prod_{k=1}^{N}\langle w_k|\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\,\varepsilon\right\}|w_{k-1}\rangle \qquad \text{(II,4,1b)}$$

essendo $w_N = w''$ e $w_0 = w'$.

Volendo effettuare il passaggio al limite per $N \longrightarrow \infty$,e cioe' per $\varepsilon \longrightarrow 0$ potremo sviluppare le funzioni che compaiono nell'integrando della (II,4,1b) in serie di potenze di ed arrestarci al primo ordine in ε ;otterremo allora :

$$\langle w_k | \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{H}\right\} | w_{k-1}\rangle = \langle w_k | 1 - \frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{H} | w_{k-1}\rangle =$$

$$= \langle w_k | w_{k-1}\rangle \left(1 - \frac{i}{\hbar}\varepsilon \frac{\langle w_k|\hat{H}|w_{k-1}\rangle}{\langle w_k|w_{k-1}\rangle}\right) = \langle w_k|w_{k-1}\rangle \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon \frac{\langle w_k|\hat{H}|w_{k-1}\rangle}{\langle w_k|w_{k-1}\rangle}\right\} =$$

$$= \exp\left\{ \lg(\langle w_k|w_{k-1}\rangle)\right\} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \frac{\langle w_k|\hat{H}|w_{k-1}\rangle}{\langle w_k|w_{k-1}\rangle}\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\varepsilon\left(-\frac{i}{\varepsilon}\hbar \lg(\langle w_k|w_{k-1}\rangle) - \frac{\langle w_k|\hat{H}|w_{k-1}\rangle}{\langle w_k|w_{k-1}\rangle}\right]\right\} \qquad \text{(II,4,2)}$$

In quest'ultima espressione,ponendo $|w_k\rangle = |w_{k-1}\rangle + |\ w_k\rangle$ avremo al primo ordine :

$$\frac{1}{\varepsilon}\lg\langle w_k|w_{k-1}\rangle = \frac{1}{\varepsilon}\lg\left(\langle w_k|w_k\rangle - \langle w_k|\Delta w_k\rangle\right) = \frac{1}{\varepsilon}\lg\left(1 - \langle w_k|\Delta w_k\rangle\right)$$

dove si sono considerati in questo caso stati coerenti normalizzati ; se ora osserviamo che e' $\varepsilon = (t''-t')/N = \Delta t$ si avrà :

$$\frac{1}{\varepsilon}\lg\left(\langle w_k|w_{k-1}\rangle\right) \cong -\frac{1}{\varepsilon}\langle w_k|\Delta w_k\rangle \cong -\langle w_k|\frac{\partial}{\partial t}w_k\rangle$$

Analogamente per il secondo termine all'esponente della (II,4,2) :

$$\frac{\langle w_k|\hat{H}|w_{k-1}\rangle}{\langle w_k|w_{k-1}\rangle} = \frac{\langle w_k|\hat{H}|w_k\rangle - \langle w_k|\hat{H}|\Delta w_k\rangle}{\langle w_k|w_k\rangle - \langle w_k|\Delta w_k\rangle} \cong \langle w_k|\hat{H}|w_k\rangle$$

in questo caso si é considerata un'approssimazione di ordine zero perché nella (II,4,2) questa espressione é moltiplicata per ε .

La (II,4,2) puó allora essere riscritta come segue :

$$\exp\left\{ \frac{i}{\hbar}\, \varepsilon \left(\langle w_k |\, i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \,| w_k \rangle \right) \right\}$$

sostituendo quindi nell'integrale (II,4,1b) si ottiene :

$$k(w''t'', w't') = \lim_{N\to\infty} \int \cdots \int \prod_{k=1}^{N-1} d\mu(w_k) \prod_{k=1}^{N} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar}\, \varepsilon \left(\langle w_k |\, i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \,| w_k \rangle \right) \right\} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int \cdots \int \prod_{k=1}^{N-1} d\mu(w_k) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^{N} \varepsilon \langle w_k |\, i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \,| w_k \rangle \right\}$$

Introduciamo ora una notazione piú compatta per l'espressione del propagatore :

$$k(w''t'', w't') = \int \mathcal{D}\mu(w(t)) \exp \frac{i}{\hbar} S[w(t)] \qquad \text{(II,4,1c)}$$

dove porremo :

$$\mathcal{D}\mu(w(t)) = \lim_{N\to\infty} \int \cdots \int \prod_{k=1}^{N-1} d\mu(w_k)$$

$$S[w(t)] = \int_{t'}^{t''} \langle w(t) |\, i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \,| w(t) \rangle dt = \int_{t'}^{t''} \mathcal{L}\, dt \qquad \text{(II,4,3)}$$

$$\mathcal{L}(w, w^*, \dot{w}, \dot{w}^*) = \langle w(t) |\, i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \,| w(t) \rangle$$

Dove S é equivalente ad un'azione classica con lagrangiana L. Per valutare l'espressione esplicita della lagrangiana utilizzeremo un artificio per poter operare sul prodotto scalare di due stati coerenti la cui espressione é data, a meno di normalizzazioni, dalla (II,2,16)

Supponendo che n sia la dimensione (complessa) dello spazio omogeneo G_o/S_o avremo :

$$\langle w(t)| i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |w(t)\rangle = i\hbar \sum_{k=1}^{n} \langle w(t)| \dot{w}^k \frac{\partial}{\partial w^k} + \dot{w}^{*k} \frac{\partial}{\partial w^{*k}} |w(t)\rangle \qquad (II,4,4)$$

Poiché in questo ambito si sono considerati stati coerenti $|w\rangle$ normalizzati il prodotto scalare é dato da :

$$\langle v|w\rangle = \frac{\mathcal{F}(v^*,w)}{[\mathcal{F}(v^*,v)\,\mathcal{F}(w^*,w)]^{1/2}}$$

essendo la funzione $\mathcal{F}$ definita dal prodotto scalare (II,4,16) di stati coerenti non normalizzati. Calcolando le derivate rispetto a w e a w* :

$$\frac{\partial}{\partial w^k}\langle v|w\rangle = \frac{\partial}{\partial w^k}\left[\frac{\mathcal{F}(v^*,w)}{[\mathcal{F}(v^*,v)\,\mathcal{F}(w^*,w)]^{1/2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{[\mathcal{F}(v^*,v)\,\mathcal{F}(w^*,w)]^{1/2}}\left\{\frac{\partial}{\partial w^k}\mathcal{F}(v^*,w) - \frac{1}{2}\frac{\mathcal{F}(v^*,w)}{\mathcal{F}(w^*,w)}\frac{\partial}{\partial w^k}\mathcal{F}(w^*,w)\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial w^{k*}}\langle v|w\rangle = -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{F}(v^*,w)}{[\mathcal{F}(v^*,v)]^{1/2}[\mathcal{F}(w^*,w)]^{3/2}}\cdot\frac{\partial}{\partial w^{k*}}\mathcal{F}(w^*,w)$$

prendendo poi il limite per v $\longrightarrow$ w queste due espressioni diventano rispettivamente :

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\mathcal{F}(w^*,w)}\frac{\partial}{\partial w^k}\mathcal{F}(w^*,w) \qquad\qquad -\frac{1}{2}\frac{1}{\mathcal{F}(w^*,w)}\frac{\partial}{\partial w^{k*}}\mathcal{F}(w^*,w)\,.$$

sostituendo nell'espressione della lagrangiana si ottiene :

$$L = \frac{1}{2} i\hbar \sum_{k=1}^{n}\left\{\dot{w}^k\frac{\partial}{\partial w^k}[\lg\mathcal{F}] - \dot{w}^{k*}\frac{\partial}{\partial w^{k*}}[\lg\mathcal{F}]\right\} - \mathcal{H}(w^*,w) \qquad (II,4,5)$$

essendo per definizione :

$$\mathcal{H}(w^*,w) = \langle w|\hat{H}|w\rangle$$

Esaminiamo ora l'approssimazione di fase stazionaria per il propagatore (II,4,1c),dove si considera la costante $\hbar$ piccola rispetto all'azione S.Il contributo maggiore al propagatore é allora dato dai cammini nello spazio della variabile w che rendono stazionaria l'azione e quindi la fase dell'integrando del propagatore.

Ricercheremo quindi quei cammini che soddisfano all'equazione:

$$\delta S = \int_{t'}^{t''} \mathcal{L}(w,w^*,\dot{w},\dot{w}^*)\,dt = 0 \qquad \text{(II,4,6)}$$

richiedendo che la variazione δ sia fatta tenendo fissi gli estremi $w(t')=w'$; $w(t")=w"$.

Si ottengono quindi ovviamente le equazioni di Eulero-Lagrange per la funzione L(w,w*,w,w*) nelle variabili canoniche w e w*.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{w}^i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w^i} = 0 \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{w}^{i*}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w^{i*}} = 0 \quad i=1,\dots,n \qquad \text{(II,4,7)}$$

Ricordando l'espressione esplicita della lagrangiana (II,4,5) possiamo porre le equazioni (II,4,7) in forma "hamiltoniana"

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{w}^i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w^i} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial(\lg \mathcal{I})}{\partial w^i}\right] - \frac{i\hbar}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2(\lg \mathcal{I})}{\partial w^i \partial w^k}\dot{w}^k - \frac{\partial^2(\lg \mathcal{I})}{\partial w^i \partial w^{k*}}\dot{w}^{k*}\right) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w^i} =$$

$$= \frac{i\hbar}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial^2(\lg\mathcal{J})}{\partial w^i\partial w^k}\dot{w}^k + \frac{\partial^2(\lg\mathcal{J})}{\partial w^i\partial w^{k*}}\dot{w}^{k*}\right] - \frac{i\hbar}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial^2(\lg\mathcal{J})}{\partial w^i\partial w^k}\dot{w}^k - \frac{\partial^2(\lg\mathcal{J})}{\partial w^i\partial w^{k*}}\dot{w}^{k*}\right] + \frac{\partial H}{\partial w^i}$$

da cui si ottiene :

$$\frac{\partial H}{\partial w^i} = -i\hbar\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\lg\mathcal{J}}{\partial w^i\partial w^{k*}}\dot{w}^{k*} = -i\hbar\sum_{k=1}^{n} g_{i\bar{k}}\,\dot{w}^{k*}$$

analogamente dalla seconda delle (II,4,7) :

$$\frac{\partial H}{\partial w^{i*}} = i\hbar\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\lg\mathcal{J}}{\partial w^{i*}\partial w^k}\dot{w}^k = i\hbar\sum_{k=1}^{n} g_{\bar{i}k}\,\dot{w}^k = i\hbar\sum_{k=1}^{n} g_{k\bar{i}}\,\dot{w}^k$$

Queste equazioni rappresentano le analoghe delle equazioni di Hamilton per uno spazio delle fasi dotato di una metrica definita da :

$$g_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2(\lg\mathcal{J})}{\partial w^i\,\partial w^{j*}} \qquad \text{(II,4,8)}$$

La metrica (II,4,8) induce sullo spazio omogeneo una struttura Kähleriana essendo ln($\mathcal{J}$) reale definita positiva [si veda §(II,3,b)].

Partendo da questa interpretazione dello spazio omogeneo G_o/S_o come spazio delle fasi generalizzato,é possibile ricavare delle regole di quantizzazione alla Bohr-Sommerfeld per ottenere gli autovalori dell'energia per sistemi legati.

In base alla trattazione generale della Meccanica Qunatistica gli autovalori dell'energia per un sistema con hamiltoniana H sono dati dai poli della funzione di Green :

$$K(E) = i\int_0^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar}ET}\, Tr\left\{\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}T\right)\right\} dT = tr\left(\frac{1}{E-\hat{H}}\right) \qquad \text{(II,4,9)}$$

Per il calcolo di questo integrale poniamo :

$$\mathrm{Tr}\left\{\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}T\right)\right\} = K(T) = \int d\mu(w_0)\cdot \langle w_0 | \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}T\right) | w_0 \rangle$$

dove l'operatore é stato espresso nella base degli stati coerenti,e dove si sono considerati solamente elementi diagonali dovendosi calcolare la traccia.Utilizzando il path integral precedentemente definito (II,4,1c) scriveremo :

$$K(T) = \int d\mu(w_0) \int \mathcal{D}\mu(w(t)) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S[w(t)]\right\}$$

il calcolo va effettuato solamente per traiettorie chiuse,essendo uguali gli stati iniziale e finale del propagatore.

$$w'' = w'$$

Nell'approssimazione di fase stazionaria si ricercheranno i cammini (chiusi) che rendono stazionaria l'azione ; le chiameremo orbite classiche , e le indicheremo con o.cl..
A meno di costanti si avrá per il propagatore corrispondente a tali orbite classiche :

$$K^{cl}(T) \sim \sum_{o.cl.} \int d\mu(w_0) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S^{cl}(T)\right\}$$

Osserviamo ora che l'azione é un funzionale della traiettoria ; essa pertanto non dipende dal "punto iniziale" w_0,rispetto al quale si integra , e l'integrale si puó scrivere :

$$K^{cl}(T) \sim \sum_{o.cl.} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S^{cl}(T)\right\} \oint d\mu(w_0)$$

il valore di T é il periodo relativo all'orbita considerata ; sostituendo nella (II,4,9) :

$$K^{cl}(E) \sim i \int_0^\infty \exp\left\{\frac{i}{\hbar} ET\right\} k^{cl}(T)\, dT$$

$$= i \int_0^\infty \exp\left\{\frac{i}{\hbar} ET\right\} \cdot \sum_{o.cl.} \exp\left\{+\frac{i}{\hbar} S^{cl}(T)\right\} dT \oint d\mu(w_0)$$

$$= \sum_{o.cl.} i \int_0^\infty \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(ET + S^{cl}(T))\right\} dT \oint d\mu(w_0) \qquad \text{(II,4,9b)}$$

Anche in questo caso il contributo all'integrale rispetto al tempo é dato dalle sole espressioni che rendono staziona- rio l'esponenziale ; ricercheremo quindi una relazione tra il tempo T e l'energia E per la quale sia :

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(S^{cl}(T) + ET\right) = \frac{\partial S^{cl}(T)}{\partial T} + E = 0 \qquad \text{(II,4,10)}$$

se T=T(E) é la soluzione di tale equzione porremo :

$$W(E) = S^{cl}(T(E)) + ET(E)$$

e l'integrale (II,4,9b)si scriverá,sempre a meno di costanti :

$$K^{cl}(E) \sim \sum_{o.cl} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} W(E)\right\} \oint d\mu(w_0)$$

Per il calcolo dei poli di questa funzione saremo interessati al solo studio del primo fattore $\sum_{o.cl.} \exp\{(i/h)W(E)\}$; cerchia- moquindi di valutare esplicitamente la funzione W(E) ; ricor- dando l'espressione (II,4,3) dell'azione avremo :

$$W(E) = S^{cl}(T(E)) + E\,T(E) = \int_0^{T(E)} dT \langle w(t)|\, i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\,|w(t)\rangle - E\,T(E)$$

essendo la traiettoria w(t) ciclica,tale che ,su essa,l'azione é stazionaria e soddisfa all'equazione (II,4,10).In questa trattazione le funzioni S, $\mathcal{L}$ ed $\mathcal{H}$ giocano il ruolo , in base alle relazioni che le legano,dell'azione,della lagrangiana e dell'hamiltoniana della Meccanica Classica ; in tale schema S ed $\mathcal{H}$ sono associate dall'analogo dell'equazione di Hamilton-Jacobi :

$$\frac{\partial S}{\partial T} + \mathcal{H} = 0$$

é allora evidente che l'equazione estremante (II,4,10) si riduce alla condizione $E=\mathcal{H}(z,z^*)=\langle w(t)|\hat{H}|w(t)\rangle$.

L'espressione della funzione W(E) diventa quindi :

$$W(E) = \int_0^{T(E)} dT \langle w(t)|\, i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,|w(t)\rangle$$

essendo la traiettoria w(t) sulla superficie dell'"hamiltoniana" costante.

Tenendo conto del fatto che le traiettorie possono essere percorse piú volte,e sommando su tutti questi moti multiplamente periodici si avrá :

$$K^{cl}(E) \sim \sum_{o.cl.} \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} W(E) m\right\} = \sum_{o.cl} \frac{1}{1-\exp\left\{\frac{i}{\hbar}W(E)\right\}} - 1 =$$

$$= \sum_{o.cl} \frac{\exp\left\{\frac{i}{\hbar}W(E)\right\}}{1-\exp\left\{\frac{i}{\hbar}W(E)\right\}}$$

i cui poli sono dati dalla condizione $\exp[(i/\hbar)W(E)]=1$; cioé :

$$W(E) = 2\pi n\hbar \tag{II,4,11}$$

Per ottenere una condizione di quantizzazione alla Bohr-Sommerfeld sfrutteremo la proprietá (II,4,4) utilizzata per il calcolo esplicito dell'azione :

$$W(E) = \int_0^{T(E)} \frac{i\hbar}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial(\lg \mathcal{J})}{\partial w^k} dw^k - \frac{\partial(\lg \mathcal{J})}{\partial w^{k*}} dw^{k*} \right)$$

applicando quindi il teorema di Stockes [12.,pag 280]

$$W(E) = \int \frac{i\hbar}{2} d\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(\lg \mathcal{J})}{\partial w^k} dw^k - \frac{\partial(\lg \mathcal{J})}{\partial w^{k*}} dw^{k*} \right) \tag{II,4,12}$$

dove l'integrazione va fatta sulla parte di superficie $\mathcal{H}(w,w^*)=E$ limitata dalla traiettoria periodica considerata.
Calcoliamo esplicitamente la 2-forma integranda ;

$$d\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(\lg \mathcal{J})}{\partial w^k} dw^k - \frac{\partial(\lg \mathcal{J})}{\partial w^{k*}} dw^{k*} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \left[\frac{\partial^2(\lg \mathcal{J})}{\partial w^k \partial w^\ell} dw^k \wedge dw^\ell + \frac{\partial^2(\lg \mathcal{J})}{\partial w^k \partial w^{\ell*}} dw^k \wedge dw^{\ell*} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2(\lg \mathcal{J})}{\partial w^{k*} \partial w^\ell} dw^{k*} \wedge dw^\ell - \frac{\partial^2(\lg \mathcal{J})}{\partial w^{k*} \partial w^{\ell*}} dw^{k*} \wedge dw^{\ell*} \right]$$

Sfruttando le proprietá di antisimmetria del prodotto "wedge" ($\wedge$) e la possibilitá di scambiare le derivate , e cambiando i nomi agli indici sommati avremo:

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \left[\frac{\partial^2(\lg \mathcal{J})}{\partial w^k \partial w^\ell} \left(dw^k \wedge dw^\ell - dw^k \wedge dw^\ell \right) + \right.$$

$$+\frac{\partial(\ell_g \mathcal{J})}{\partial w^{k*}\partial w^{\ell*}}\left(dw^{k*}\wedge dw^{\ell*}-dw^{k*}\wedge dw^{\ell*}\right)+\frac{\partial^2(\ell_g \mathcal{J})}{\partial w^k \partial w^{\ell*}}\left(dw^k\wedge dw^{\ell*}+dw^k\wedge dw^{\ell*}\right)\Bigg]=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{m} 2\,\frac{\partial(\ell_g \mathcal{J})}{\partial w^k \partial w^{\ell*}}\left(dw^k\wedge dw^{\ell*}\right).$$

Sostituendo nella (II,4,12)

$$W(E)=\int i\hbar \sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{m}\frac{\partial(\ell_g \mathcal{J})}{\partial w^k \partial w^{\ell*}}\,dw^k\wedge dw^{\ell*}=\int \sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{m} i\hbar\, g_{k\bar{\ell}}\,dw^k\wedge dw^{\ell*}$$

dove si é utilizzata la metrica definita dalla (II,4,8).

La condizione di quantizzazione (II,4,11) si scrive dunque :

$$\frac{\hbar}{2}\int\Omega=\int\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{m} i\hbar\, g_{k\bar{\ell}}\,dw^k\wedge dw^{\ell*}=2\pi\hbar\, n \qquad (II,4,13)$$

dove Ω é la 2-forma differenziale (reale) connessa alla struttura Kähleriana dello spazio omogeneo (II,3,10)

Osserviamo ora a questo punto come sia possibile generalizzare anche in questo caso l'affermazione che gli stati coerenti sono gli stati quantistici che maggiormente si avvicinano alla descrizione classica del sistema considerato.

Consideriamo infatti una "traiettoria" nello spazio di Hilbert che si mantenga coerente nel tempo, e che corrisponda ad una soluzione dell'equazione di Schrödinger :

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\hat{H}\right)|w(t)\rangle=0 \qquad (II,4,14)$$

(questo é possibile se l'hamiltoniana $\hat{H}$ del sistema conserva la coerenza) ; vogliamo mostrare che la corrispondente traiettoria w(t) nello spazio delle fasi generalizzato G_0/S_0 rende stazionaria l'azione. Consideriamo infatti la variazione dell'azione :

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \langle w(t) | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} | w(t) \rangle dt$$

per effettuare correttamente la variazione é necessario descrivere l'integrale in termini delle funzioni di Fock-Bargmann generalizzato, introducendo la risoluzione dell'identitá su un generico set di stati ortonormalizzati $\{|k\rangle, k=1,\dots,n\}$.

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{m} \langle w(t)|k\rangle\langle k| i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} |\ell\rangle\langle \ell | w(t)\rangle =$$

$$= \delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{m} u_k(w) \left(i\hbar \delta_{k\ell} \frac{\partial}{\partial t} - H_{k\ell} \right) u^*_\ell(w)$$

dove si sono introdotte le funzioni $u_i(w)$ definite da $\langle w|i\rangle$ (II,3,5b) e dove si é posto : $H_{k\ell} = \langle k|H|l\rangle$.

Eseguendo la variazione avremo ovviamente :

$$\delta S = \int_{t'_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{m} \left[\delta u_k(w) \left(i\hbar \delta_{k\ell} \frac{\partial}{\partial t} - H_{k\ell} \right) u^*_\ell(w) + u_k(w) \left(i\hbar \delta_{k\ell} \frac{\partial}{\partial t} - H_{k\ell} \right) \delta u^*_\ell(w) \right]$$

Integrando per parti il secondo addendo si ha :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{m} \left[\delta u_k(w) \left(i\hbar \delta_{k\ell} \frac{\partial}{\partial t} - H_{k\ell} \right) u^*_\ell(w) \right] +$$

$$+ \quad + \left(-i\hbar \delta_{k\ell} \frac{\partial}{\partial t} - H_{k\ell} \right) u_k(w) \delta u^*_\ell(w) + \Big[u_k(w) i\hbar \, \delta u^*_\ell(w) \Big]_{w(t_1)}^{w(t_2)}$$

l'ultimo addendo di questa espressione é nullo in virtú del fatto che la variazione é fatta in modo tale che gli estremi restino immutati . Scriveremo quindi, tornando alla rappresentazione in termini di stati coerenti :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{m} \delta(\langle w(t)|k\rangle)\langle k| i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}|w(t)\rangle + \sum_{e=1}^{m} \langle w(t)|\left(-i\hbar \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial t} - \hat{H}\right)|e\rangle \delta(\langle e|w\rangle)$$

dove si é indicato con $\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial t}$ la derivata temporale fatta sul "bra" $\langle w(t)|$. Entrambi gli addendi dell'equazione sono nulli per la (II,4,14) e per la sua trasposta , pertanto si ha effettivamente $\delta S=0$.

Questo significa anche che la traiettoria $w(t)$ nello spazio delle fasi generalizzato soddisfa alle equazioni di Eulero-Lagrange , e sussiste una corrispondenza biunivoca fra la traiettoria classica ed evoluzione quantistica coerente.

Vogliamo ora considerare quale é la piú generale hamiltoniana che conserva la coerenza , tale cioé che l'evoluto temporale di uno stato coerente sia ancora uno stato coerente.

Perché si verifichi quest'ultima situazione é necessario che l'operatore di evoluzione temporale $U(t,t_0)=\exp[(i/h)H(t-t_0)]$ sia un sottogruppo ad un parametro di un gruppo di Lie $\mathcal{G}$ che agisce sulla varietá G_0/S_0 sulla quale sono definiti gli stati coerenti : indicando con $Aut(G_0/S_0)$ il gruppo degli automorfismi della varietá in sé dovrá essere $\mathcal{G}=Aut(G_0/S_0)$.
Se $\tilde{\mathbb{G}}$ é l'algebra di Lie di $\mathcal{G}$ si dovrá avere :

$$\hat{H} \in \tilde{\mathbb{G}}$$

Osseviamo inoltre che il gruppo associato all'algebra di Lie degli stati coerenti é un sottogruppo degli automorfismi dello spazio omogneo quoziente.

$$\exp(\mathbb{G}) \subset \mathrm{Aut}(G_0/S_0)$$

Dovrá quindi essere :

$$\tilde{\mathbb{G}} = \mathbb{G} \oplus \mathbb{E}$$

essendo $\mathbb{E}$ un'estensione dell'algebra degli stati coerenti.
Per vedere quali sono le proprietá che dobbiamo richiedere a tale estensione $\mathbb{E}$ operiamo moltiplicativamente con il gruppo $\exp(\tilde{\mathbb{G}})$ sul gruppo $\exp(\mathbb{G})$, e quindi tramite quest'ultimo sulla varietá G_0/S_0 .
Se $g+e \in \tilde{\mathbb{G}}$ e $g_0 \in \mathbb{G}$ consideriamo il prodotto :

$$\exp(g+e)\exp(g_0)$$

e richiediamo che si possa scrivere come segue :

$$\exp(g+e)\exp(g_0) = \exp(g')\exp(e)$$

$$g' \in \mathbb{G} \qquad \exp(e)\,|\Omega\rangle = |\Omega\rangle$$

essendo $|\Omega\rangle$ lo stato di partenza dello spazio di Hilbert considerato.
Condizione sufficiente perchè una tale equazione possa essere scritta é che l'algebra $\mathbb{G}$ sia ideale di $\tilde{\mathbb{G}}$: applicando infatti la formula B.C.H. si ottiene :

$$\exp(g+e)\exp(g_0) = \exp\left(g+e+g_0+[g+e,g_0]+\cdots\right) =$$

Sfruttando l'ipotesi $[\tilde{\mathbb{G}},\mathbb{G}] \subset \mathbb{G}$ possiamo scrivere :

$$= \exp(g+g_0+e+g') = \exp(g''+e) = \exp(g''')\exp(e)$$

dove $g', g'', g''' \in \mathbb{G}$; l'ultima uguaglianza si ottiene applicando ancora la formula di B.C.H..

Vediamo ora quale deve essere la relazione tra l'algebra estesa $\tilde{\mathbb{G}}$ e l'algebra $\mathbb{G}$ degli stati coerenti.

Se $\tilde{\mathbb{G}}$ é semisemplice , allora essa é somma diretta di algebre semplici,mutuamente commutanti :

$$\tilde{\mathbb{G}} = \bigoplus_j \mathbb{G}_j \qquad [\mathbb{G}_j , \mathbb{G}_i] = 0 \quad \text{se } i \neq j$$

essendo $\mathbb{G}$ sottoalgebra di $\tilde{\mathbb{G}}$ essa deve essere semisemplice, l'estensione $\mathbb{E}$ é allora costituita di sottoalgebre semplici che commutano tutte con $\mathbb{G}$.

$$\mathbb{E} = \bigoplus_k \mathbb{G}_k \qquad [\mathbb{G}_k , \mathbb{G}] = 0$$

questo corrisponde ad automorfismi identici sulla varietá (G_0 / S_0) infatti se $e \in \mathbb{E}$, $g \in \mathbb{G}$

$$\exp(e)\, \exp(g) |\Omega\rangle = \exp(g)\, \exp(e) |\Omega\rangle = \exp(g) |\Omega\rangle$$

Nel caso in cui $\tilde{\mathbb{G}}$ non é semismplice essa si puó decomporre utilizzando la decomposizione di Levi , come segue :

$$\tilde{\mathbb{G}} = \tilde{\mathbb{G}}_{semis} \oplus \tilde{\mathbb{G}}_{sol}$$

in una parte semisemplice ($\tilde{\mathbb{G}}_{semis}$) ed in una parte solubile ($\tilde{\mathbb{G}}_{sol}$) che ne costituisce anche l'ideale solubile massimale.

Dovendo essere $\mathbb{G}$ ideale di $\tilde{\mathbb{G}}$, deve essere contenuta nella parte solubile $\tilde{\mathbb{G}}_{sol}$; se $\mathbb{G}$ é una sottoalgebra propria di $\tilde{\mathbb{G}}_{sol}$ si ha peró in generale :

$$[\mathbb{G} , \tilde{\mathbb{G}}] \not\subset \mathbb{G}$$

Affinché $\mathbb{G}$ sia effettivamente ideale di $\tilde{\mathbb{G}}$ dovrá allora essere esttamente $\mathbb{G} = \tilde{\mathbb{G}}_{sol.}$ e quindi :

$$\tilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G} \oplus \tilde{\mathfrak{G}}_{semis.}$$
$$\exp(\tilde{\mathfrak{G}}_{semis.})|\Omega\rangle = |\Omega\rangle$$

Possiamo quindi enunciare il seguente risultato :

L'hamiltoniana piú generale che conserva la coerenza del set di stati coerenti associati ad una data algebra $\mathfrak{G}$ é un'algebra piú estesa $\tilde{\mathfrak{G}}$ contenente $\mathfrak{G}$ come sottoalgebra ; tale estensione va fatta in questo modo : se $\mathfrak{G}$ é semisemplice la $\tilde{\mathfrak{G}}$ coincide con la $\mathfrak{G}$ a meno di algebre che danno origine ad automorfismi identici di G_o/S_o .

Se $\mathfrak{G}$ é solubile $\tilde{\mathfrak{G}}$ è l'algebra la cui decomposizione di Levi ha come ideale massimale solubile la stessa $\mathfrak{G}$, e come parte semisemplice una sottoalgebra che conserva lo stato di partenza $|\Omega\rangle$.Nel caso di una generica $\mathfrak{G}$ dovremo utilizzare la decomposizione di Levi ed applicare questi risultati alla parte semisemplice e solubile.

Gli aspetti dinamici ora analizzati suggeriscono alcune considerazioni sulla possibilitá di definire un sistema classico corrispondente ad un sistema quantistico assegnato con lo spazio di Hilbert degli stati e l'Hamiltoniana.

Innanzitutto rileviamo l'ambiguitá della scelta del gruppo degli stati coerenti che determina lo spazio omogeneo delle fasi : infatti l'unico requisito per il gruppo é che si possa rappresentare in modo irriducibile ed unitario sullo spazio di Hilbert. Un ulteriore requisito che puó essere imposto per rimuovere parzialmente tale ambiguitá é quello che si conservi la coerenza nell'evoluzione quantistica e conseguentemente il sistema quantistico segua la traiettoria classica come un pacchetto d'onde di minima indeterminazione.

Questo suggerisce di scegliere , come gruppo degli stati coerenti , quello minimale tale che si conservi la coerenza . Occorre perció individuare l'algebra dinamica del sistema (alla quale appartiene l'Hamiltoniana): se tale algebra é semisemplice, essa deve essere scelta come algebra degli stati coerenti . Se non é semisemplice , se ne puó considerare solo l'ideale solubile massimale.

CAPITOLO III

ESEMPI

§(III,1):"Stati Coerenti per la Rappresentazione Fondamentale di SL(n+1,$\mathbb{C}$) e della Forma reale compatta SU(n+1)"

Esaminiamo in questo paragrafo l'algebra di Lie semisemplice complessa $A_{\mathcal{C}}$ delle matrici complesse (n+1)x(n+1) a traccia nulla ; essa é l'algebra di Lie del gruppo lineare speciale SL(n+1,$\mathbb{C}$) delle matrici complesse (n+1)x(n+1) aventi il determinante uguale all'unitá . Definiremo il set di stati coerenti per la rappresentazione fondamentale di $\mathbb{SL}$(n+1,$\mathbb{C}$) e della sua forma reale compatta $\mathbb{SU}$(n+1) , costituita dalle matrici hermitiane a traccia nulla . Tale rappresentazione fondamentale, pur essendo la piú semplice, consente di evidenziare le caratteristiche enunciate in generale nel capitolo II.

§(III,1.a):"SL(n+1,$\mathbb{C}$)"

L'algebra $\mathbb{SL}$(n+1,$\mathbb{C}$) é costituita dalle matrici n x n a coefficienti complessi aventi traccia nulla . La sottoalgebra di Cartan (massimale abeliana) é costituita dalle matrici diagonali a traccia nulla . Indicheremo con E_{ij} la matrice avente tutti i coefficienti nulli salvo quello in corrispondenza della riga i-esima e della colonna j-esima che é uguale ad uno : in componenti

$$(E_{ij})_{k,e} = \delta_{ik}\,\delta_{je} \qquad \text{(III,1,1)}$$

Allora una base per la sottoalgebra di delle matrici diagonali , che indicheremo in seguito con $\mathbb{H}$, é data da :

$$h_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1} \qquad \text{(III,1,2)}$$

Essa é completata ad una base per $\mathbb{SL}(n+1,C)$ considerando :

$$E_{i,j} \qquad i \neq j \qquad \text{(III,1,3)}$$

Per quanto riguarda l'insieme delle radici di $\mathbb{SL}(n+1,\mathbb{C})$ consideriamo la base in $\mathbb{H}^*$ costituita dalle forme lineari su $\mathbb{H}$ definite come segue :

$$\lambda_i\left[diag\,(a_1,\ldots,a_{n+1})\right] = a_i \qquad i = 1,2,\ldots,n+1$$

essendo diag($a_1,\ldots,a_{n+1}$) la matrice diagonale i cui elementi diagonali sono , in ordine, gli a_i .

L'insieme di tutte e sole le radici di $\mathbb{H}$ é costituito dai funzionali lineari in $\mathbb{H}$ della forma :

$$\lambda_i - \lambda_j \qquad i \neq j \qquad i,j = 1,2,\ldots,n+1$$

I corrispondenti vettori di radice sono gli E_{ij} definiti dalla (III,1,3) , si verifica infatti banalmente che é :

$$[h, E_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j)(h)\,E_{ij} \qquad \forall h \in \mathbb{H}$$

(in questo ambito il prodotto di Lie [a,b] indica il commutatore ab-ba tra le matrici dell'algebra) .

Le n radici semplici di $\mathfrak{SL}(n+1,\mathbb{C})$ sono date da :

$$\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1} \qquad i=1,2,\dots,n \qquad \text{(III,1,4)}$$

e l'insieme delle radici puó essere scritto come segue :

$$R = \{ \mp(\lambda_i - \lambda_{j+1}) = \mp(\alpha_i + \dots + \alpha_j) \cdot 1 \le i \le j \le n \} \qquad \text{(III,1,5)}$$

Il vettore di radice corrispondente alla radice $\alpha_i + \dots + \alpha_j$ é la matrice $E_{i,j+1}$ delle (III,1,1) . Utilizzando la notazione del capitolo II ed osservando che la radice $\alpha_i + \dots + \alpha_j$ é positiva (negativa) se $i \leq j$ ($i \geq j$) definiremo :

$$\begin{aligned} e_{\alpha_i + \dots + \alpha_j} &= E_{i,j+1} \\ f_{\alpha_i + \dots + \alpha_j} &= E_{j+1,i} \end{aligned} \qquad i \le j \qquad \text{(III,1,3b)}$$

La base di Chevalley di $\mathfrak{SL}(n+1,\mathbb{C})$ é data allora da :

$$\begin{aligned} h_i &= E_{i,i} - E_{i+1,i+1} \\ e_i &= E_{i,i+1} \qquad i = 1,2,\dots,n \\ f_i &= E_{i+1,i} \end{aligned} \qquad \text{(III,1,6)}$$

Si verificano infatti banalmente le (II,2,9a) e (II,2,9b) , essendo la matrice di Cartan A data da :

$$\begin{cases} A_{ii} = 2 \\ A_{i,i+1} = A_{i+1,i} = -1 \\ A_{i,j} = 0 \qquad \text{se } |i-j| > 1 \end{cases}$$

Se consideriamo la rappresentazione fondamentale di $\mathfrak{SL}(n+1,\mathbb{C})$ lo spazio vettoriale della rappresentazione é $\mathbb{C}^{n+1}$,lo spazio delle (n+1)-ple ordinate di numeri complessi e le matrici rappresentative degli elementi di $SL(n+1,\mathbb{C})$ sono esttamente gli elementi stessi.

Il vettore di peso massimo é dato da :

$$|\lambda,\lambda\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \underline{0}_n \end{pmatrix} \quad \underline{0}_n \in \mathbb{C}^n \qquad (|\lambda,\lambda\rangle)_i = \delta_{i,1} \quad i = 1,2,\dots n+1$$

essendo $(|\lambda,\lambda\rangle)_i$ la i-esima componente della base canonica di $\mathbb{C}^{n+1}$: la verifica é banale ricordando la condizione (II,2,12) in base alla quale un vettore é di peso massimo se e solo se é annichilato da tutti i vettori di radice positiva.

Il peso massimo λ é la forma lineare definita sulla base (III,1,2) di $\mathbb{H}$ da :

$$\lambda(h_i) = \delta_{i,1} \qquad i = 1,\dots,n$$

I soli vettori di radice che agiscono in modo efficace sul vettore di peso massimo sono ovviamente quelli aventi almeno un elemento non nullo sulla prima colonna cioé quelli del tipo :

$$f_{\alpha_1+\dots+\alpha_i} = E_{i+1,1} \qquad i = 1,\dots,n$$

essi si ottengono come commutatori successivi di elementi della base di Chevalley (III,1,6) come segue :

$$f_{\alpha_1+\dots+\alpha_i} = [f_i [\dots [f_2, f_1]\dots]]$$

L'azione di questi vettori sul vettore di peso massimo $|\lambda,\lambda\rangle$ da' origine ai vettori corrispondenti ai pesi :

$$\mu_i = 1 - (\alpha_1 + \dots + \alpha_i)$$

tali vettori sono dati (nella notazione introdotta in §(II,2.d)) da :

$$|\lambda,\mu_i\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{i+1-esima linea} \quad , (|\lambda,\mu_i\rangle)_k = \delta_{k,i+1}$$

e costituiscono ovviamente una base di $\mathbb{C}^{n+1}$.

La sottolagebra $\mathcal{G}$ della definizione (II,2,19) è allora quella generata dagli elementi :

$$h_i \;,\; e_{\alpha i} \qquad i = 1,\dots,n$$

$$f_{\alpha_j} \qquad j = 2,\dots,n$$

Come abbiamo notato in precedenza gli unici vettori di radice che agiscano efficacemente su $|\lambda,\lambda\rangle$ sono gli $f_{\alpha_1+\dots+\alpha_j}$; osserviamo la notevole proprieta' che tali vettori commutano tra loro.

Gli stati coerenti per $SL(n+1,\mathbb{C})$ si scriveranno quindi , utilizzando la decomposizione di Gauss :

$$|\zeta\rangle = \frac{\exp\left(\sum_{i=1}^{m} \zeta_i f_{\alpha_1+\dots+\alpha_i}\right)|\lambda,\lambda\rangle}{\langle\lambda,\lambda|\exp\left(\sum_{i=1}^{m} \zeta_i f_{\alpha_1+\dots+\alpha_i}\right)|\lambda,\lambda\rangle} =$$

$$= |\lambda,\lambda\rangle + \sum_{k=1}^{m} \zeta_k |\lambda,\mu_k\rangle$$

Questa espressione ha senso per qualsiasi vettore $\underline{\zeta} \in \mathbb{C}^m$ perché si ha in ogni caso :

$$\langle\lambda,\lambda|\exp\left(\sum_{i=1}^{m} \zeta_i f_{\alpha_1+\dots+\alpha_i}\right)|\lambda,\lambda\rangle = 1$$

Utilizzando infatti una rappresentazione a blocchi delle matrici si $SL(n+1,\mathbb{C})$ e del vettore $|\lambda,\lambda>$ si puó scrivere :

$$|\lambda,\lambda> = \left(\frac{1}{\underline{0}}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \zeta_i f_{\alpha_1+\dots+\alpha_i} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \underline{0} \\ \hline \underline{\zeta} & \underline{\underline{0}}_m \end{array}\right) \longrightarrow \exp\left(\sum_{i=1}^{m} \zeta_i f_{\alpha_1+\dots+\alpha_i}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \underline{0} \\ \hline \underline{\zeta} & \underline{\underline{I}}_n \end{array}\right)$$

e quindi :

$$\langle\lambda,\lambda|\exp\left(\sum_{i=1}^{m} \zeta_i f_{\alpha_1+\dots+\alpha_i}\right)|\lambda,\lambda\rangle = (1|\underline{0})\left(\begin{array}{c|c} 1 & \underline{0} \\ \hline \underline{\zeta} & \underline{\underline{I}}_m \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 1 \\ \underline{0} \end{array}\right) =$$

$$= (1|\underline{0})\left(\frac{1}{\underline{\zeta}}\right) = 1$$

dove si sono indicate con $\underline{\zeta}$ e $\underline{0}$ rispettivamente un generico vettore e lo zero di $\mathbb{C}^m$ e con $\underline{\underline{I}}_n$, $\underline{\underline{0}}_m$ le matrici identitá e nulla con n linee ed n colonne .

§(II,1.b):"SU(n+1)"

La forma reale compatta di $SL(n+1,\mathbb{C})$ é costituita dalle matrici antihermitiane , a traccia nulla . Essa é l'algebra di Lie del gruppo SU(n+1) delle matrici unitarie (n+1)x(n+1) (ricordiamo che una matrice é unitaria se e solo se :

$$U^{-1} = U^{+}$$

essendo U^{+} la trasposta coniugata di U) : per tale motivo indicheremo tale forma reale con $\mathbb{SU}(n+1)$.
Una base per $\mathbb{SU}(n+1)$ (inteso come spazio vettoriale reale) si costruisce a partire dalle radici di $\mathbb{SL}(n+1,\mathbb{C})$ come segue :
se $\alpha = \alpha_i + \ldots + \alpha_j$ é una radice di $\mathbb{SL}(n+1,C)$ consideriamo i vettori di radice e_α ed f_α definiti precedentemente e ad essi associamo i vettori :

$$a_\alpha = i(e_\alpha + f_\alpha) = i(E_{i,j+1} + E_{j+1,i})$$
$$b_\alpha = e_\alpha - f_\alpha = E_{i,j+1} - E_{j+1,i}$$
$$c_\alpha = i h_\alpha = i(E_{ii} - E_{j+1,j+1})$$

(Si veda §(II,3.a)) ; la base di $\mathbb{SU}(n+1)$ é allora data dai vettori a_α, b_α corrispondenti a tutte le radici α e dai vettori h_{α_k} associati alle radici semplici che coincidono con gli h_k della base di Chevalley (III,1,6).
Osserviamo inoltre che ognuna delle terne a_α, b_α, c_α costituisce una sottoalgebra tridimensionale isomorfa all'algebra del momento angolare ; valgono infatti le regole di commutazione :

$$[a,b]=-2c \qquad \text{e cicliche}$$

che coicidono con quelle tra $\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z$ identificando :

$$\hat{J}_x = -\frac{i\hbar}{2} a \qquad J_y = -\frac{i\hbar}{2} b \qquad J_z = -\frac{i\hbar}{2} c$$

Considereremo per $\mathbb{SU}(n+1)$ il set di stati coerenti associati alla rappresentazione fondamentale di questa algebra , il vettore di peso massimo é allora lo stesso $|\lambda,\lambda\rangle$ definito in §(III,1.b) , il sottogruppo S_0 di stabilitá per tale vettore é dato da $SU(n+1)\cap S$ essendo S il sottogruppo di stabilitá per tutto il gruppo $SL(n+1,C)$. Potremo allora etichettare i punti dello spazio omogeneo fattore utilizzando i vettori di $SU(n+1)$ che sono combinazioni lineari di tutti e soli i vettori di radice :

$$e_{\alpha_1+\dots+\alpha_i} \; ; \; f_{\alpha_1+\dots+\alpha_i} \qquad i=1,\dots,m$$

Indicando per semplificare la notazione con :

$$A_1 = \{ \alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_i \mid i=1,\dots,m \}$$

i punti dello spazio omogeneo fattore si ottengono esponenziando il sottospazio $\mathfrak{M}$ definito dalla relazione $\mathfrak{SU}(n+1)=\mathfrak{S}_0\oplus\mathfrak{M}$ come segue :

$$\exp\Big(\sum_{\alpha\in A_1} i y_\alpha (e_\alpha+f_\alpha) + x_\alpha (e_\alpha - f_\alpha)\Big) \cdot \qquad x_\alpha , y_\alpha \in \mathbb{R}$$

che potremo scrivere ponendo $\zeta_\alpha=-x_\alpha+iy_\alpha$

$$\exp\Big\{ \sum_{\alpha\in A_1} (\zeta_\alpha f_\alpha - \zeta_\alpha^* e_\alpha)\Big\} \quad \zeta_\alpha\in\mathbb{C} \qquad \text{(III,1,7)}$$

Volendo utilizzare la rappresentazione non compatta precedentemente introdotta mostriamo come sia possibile scrivere la (III,1,7) nella forma :

$$\exp\Big(\sum_{\alpha\in A_1} \xi_\alpha f_\alpha \Big) \exp\Big(\sum_{\alpha\in A_1} \beta_\alpha h_\alpha\Big) \exp\Big(\sum_{\alpha\in A_1} -\xi^*_\alpha e_\alpha\Big) \qquad \text{(III,1,8)}$$

essendo $\xi_\alpha \in \mathbb{C}$; $\beta_\alpha\in\mathbb{R}$ dei numeri associati al corrispondente $\zeta_\alpha\in\mathbb{C}$ della (III,1,7).

Per verificare che tale decomposizione é possibile considereremo la rarappresentazione di $SU(n+1)$ come matrici hermitiane a traccia nulla . Le matrici corrispondenti agli elementi (III,1,7) e (III,1,8) possono essere scritte in forma bloc-chizzata ; per le prime si ha :

$$\sum_{\alpha\in A_1}(\zeta_\alpha f_\alpha - \zeta^*_\alpha e_\alpha) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -\underline{\zeta}^+ \\ \hline \underline{\zeta} & \underline{\underline{0}}_m \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & (-\zeta^*_j) \\ \hline (\zeta_i) & \underline{\underline{0}}_n \end{array}\right)$$

essendo $\underline{\zeta} \in \mathbb{C}^m$ il vettore colonna la cui i-esima componente é la ζ_α con $\alpha = \alpha_1 + .. + \alpha_i$; $\underline{\zeta}^+$ rappresenta il suo trasposto coniugato (e quindi un vettore linea) ed $\underline{\underline{0}}_n$ é la matrice quadrata nxn ad elementi tutti nulli . Per esponenziare queste matrici dovremo considerare le successive potenze :

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & (-\zeta^*_j) \\ \hline (\zeta_i) & \underline{\underline{0}}_m \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 0 & (-\zeta^*_j) \\ \hline (\zeta_i) & \underline{\underline{0}}_m \end{array}\right) = \begin{pmatrix} -\sum_{k=1}^{m}\zeta_k\zeta^*_k & \underline{0} \\ \underline{0} & (-\zeta_i\zeta^*_j) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} -\|\underline{\zeta}\|^2 & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & (-\zeta_i\zeta^*_j) \end{array}\right)$$

$$\|\underline{\zeta}\|^2 = \sum_{k=1}^{m}|\zeta_k|^2$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & (-\zeta^*_j) \\ \hline (\zeta_i) & \underline{\underline{0}}_m \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} -\|\underline{\zeta}\|^2 & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & (-\zeta_i\zeta^*_j) \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \zeta^*_j\|\underline{\zeta}\|^2 \\ -\zeta_i\|\underline{\zeta}\|^2 & \underline{\underline{0}}_n \end{pmatrix} =$$

$$= -\|\underline{\zeta}\|^2\left(\begin{array}{c|c} 0 & (-\zeta^*_j) \\ \hline (\zeta_i) & \underline{\underline{0}}_m \end{array}\right)$$

si é qui indicato con $(-\zeta_i\zeta^*_j)$ la matrice quadrata le cui componenti sono questi prodotti.

Proseguendo in questo modo é evidente che si potranno sommare separatamente le potenze pari e le potenze dispari della matrice di partenza . Per le potenze dispari otteniamo :

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & (-\zeta_j^*) \\ \hline (\zeta_i) & \underline{\underline{0}}_n \end{array}\right)\left[1-\frac{1}{3!}\|\underline{\zeta}\|^2+\frac{1}{5!}\|\underline{\zeta}\|^4-\cdots\right]=\frac{1}{\|\underline{\zeta}\|}\cdot \sin(\|\underline{\zeta}\|)$$

per le potenze pari si ha invece :

$$\left(\begin{array}{c|c} \|\underline{\zeta}\|^2 & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & (\zeta_i\zeta_j^*) \end{array}\right)\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{4!}\|\underline{\zeta}\|^2-\cdots\right]+\left(\begin{array}{c|c} 1 & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \underline{\underline{0}}_n \end{array}\right)=$$

$$-\left(\begin{array}{c|c} 1 & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \dfrac{(\zeta_i\zeta_j^*)}{\|\underline{\zeta}\|^2} \end{array}\right)\left[1-\frac{1}{2}\|\underline{\zeta}\|^2+\frac{1}{4!}\|\underline{\zeta}\|^2-\cdots\right]+\left(\begin{array}{c|c} 1 & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \underline{\underline{0}}_n \end{array}\right)-\left(\begin{array}{c|c} 1 & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \dfrac{(\zeta_i\zeta_j^*)}{\|\underline{\zeta}\|^2} \end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{cc} 1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \dfrac{(\zeta_i\zeta_j^*)}{\|\underline{\zeta}\|^2} \end{array}\right)\cos(\|\underline{\zeta}\|)+\left(\begin{array}{c|c} 0 & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \left(\delta_{ij}-\dfrac{\zeta_i\zeta_j^*}{\|\underline{\zeta}\|^2}\right) \end{array}\right)$$

In sostanza la matrice associata all'elemento (III,1,7) é :

$$\exp\left[\sum_{\alpha\in A_1}\left(\zeta_\alpha f_\alpha-\zeta_\alpha^* e_\alpha\right)\right]=\left(\begin{array}{c|c} \cos(\|\underline{\zeta}\|) & -\dfrac{\zeta_j^*}{\|\underline{\zeta}\|}\sin\|\underline{\zeta}\| \\ \hline \dfrac{\zeta_i}{\|\underline{\zeta}\|}\sin\|\underline{\zeta}\| & \left(\delta_{ij}-\dfrac{\zeta_i\zeta_j^*}{\|\underline{\zeta}\|^2}\left(\cos(\|\underline{\zeta}\|)-1\right)\right) \end{array}\right)$$

Allo stesso modo calcoleremo il prodotto della (III,1,8) ; a tal fine osserviamo che i quadrati delle matrici $\sum_{\alpha\in A_1} \xi_\alpha f_\alpha$, $\sum_{\alpha\in A_1} \left(-\xi^*_\alpha e_\alpha\right)$ sono nulli , come é banale verificare ; questo comporta che sia :

$$\exp\left(\sum_{\alpha\in A_1} \xi_\alpha f_\alpha\right) = I + \sum_{\alpha\in A_1} \xi_\alpha f_\alpha = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \underline{0} \\ \hline (\xi_i) & \underline{I}_n \end{array}\right)$$

$$\exp\left(\sum_{\alpha\in A_1} (-\xi^*_\alpha e_\alpha)\right) = I + \sum_{\alpha\in A_1} (-\xi^*_\alpha e_\alpha) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & (-\xi^*_j) \\ \hline \underline{0} & \underline{\underline{I}}_n \end{array}\right)$$

per quanto riguarda le matrici associate all'elemento diagonale si ha :

$$\exp\left(\sum_{\alpha\in A_1} \beta_\alpha h_\alpha\right) = \exp\left(\begin{array}{c|c} \sum_{k=1}^{m} \beta_k & 0 \\ \hline 0 & (-\delta_{ij}\beta_j) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \exp\left(\sum_{k=1}^{m} \beta_k\right) & 0 \\ \hline 0 & \left(\delta_{ij}\exp(-\beta_j)\right) \end{array}\right)$$

$\beta_k = \beta_\alpha \; ; \; \alpha = \alpha_1, \dots + \alpha_k$

eseguendo il prodotto si ottiene :

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & \underline{0} \\ \hline (\xi_i) & \underline{I}_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \exp\left(\sum_{k=1}^{m} \beta_k\right) & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \left(\delta_{ij}\exp(-\beta_j)\right) \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & (-\xi^*_j) \\ \hline \underline{0} & \underline{I}_m \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 1 & \underline{0} \\ \hline (\xi_i) & \underline{I}_m \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \exp\left(\sum_{k=1}^{m} \beta_k\right) & \left(-\xi^*_j \exp\left(\sum_{k=1}^{m} \beta_k\right)\right) \\ \hline 0 & \delta_{ij} \exp(-\beta_j) \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \exp\left(\sum_{k=1}^{m} \beta_k\right) & \left(-\xi^*_j \exp\left(\sum_{k=1}^{m} \beta_k\right)\right) \\ \hline \left(\xi_i \exp\left(\sum_{k=1}^{m} \beta_k\right)\right) & \left(-\xi_i\xi^*_j \exp\left(\sum_{k=1}^{m} \beta_k\right) + \delta_{ij}\exp(-\beta_j)\right) \end{array}\right) \qquad \text{(III,1,8b)}$$

Confrontando le espressioni cosí ottenute si hanno le relazioni :

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{m}\beta_k\right) = \cos(\|\zeta\|) \qquad \text{(III,1,9a)}$$

$$\xi_i \exp\left(\sum_{k=1}^{m}\beta_k\right) = \frac{\zeta_i}{\|\zeta\|}\sin(\|\zeta\|)$$

$$\delta_{ij}\exp(-\beta_j) - \xi_i\xi_j^*\exp\left(\sum_{k=1}^{m}\beta_k\right) = \delta_{ij} + \frac{\zeta_i\zeta_j^*}{\|\zeta\|^2}\cos\|\zeta\| - \frac{\zeta_i\zeta_j^*}{\|\zeta\|^2}$$

dal confronto tra la prima e la seconda di queste equazioni :

$$\xi_i = \frac{\zeta_i}{\|\zeta\|}\,\mathrm{tg}(\|\zeta\|) \qquad \text{(III,1,10)}$$

Considerando invece gli elementi diagonali (i=j) della terza equazione e sostituendovi la (III,1,10) si ha :

$$\exp(-\beta_j) = 1 + \frac{|\zeta_i|^2}{\|\zeta\|^2}\cos(\|\zeta\|) - \frac{|\zeta_i|^2}{\|\zeta\|^2} + \frac{|\zeta_i|^2}{\|\zeta\|^2}\mathrm{tg}^2(\|\zeta\|)\cos(\|\zeta\|) =$$

$$= 1 + \frac{|\zeta_i|^2}{\|\zeta\|^2}\left[\cos(\|\zeta\|) - 1 + \frac{\sin^2(\|\zeta\|)}{\cos(\|\zeta\|)}\right] =$$

$$= 1 + \frac{|\zeta_i|^2}{\|\zeta\|^2}\,\frac{1}{\cos(\|\zeta\|)}\left[\cos^2(\|\zeta\|) + \sin^2(\|\zeta\|) - \cos(\|\zeta\|)\right]$$

$$= 1 + \frac{|\zeta_i|^2}{\|\zeta\|^2}\,\frac{(1-\cos(\|\zeta\|))}{\cos\|\zeta\|} \qquad \text{(III,1,10b)}$$

Potremo quindi scrivere effettivamente :

$$\exp\left(\sum_{\alpha\in A_1}(\zeta_\alpha f_\alpha - \zeta_\alpha^* e_\alpha)\right) = \exp\left(\sum_{\alpha\in A_1}\xi_\alpha f_\alpha\right)\exp\left(\sum_{\alpha\in A_1}\beta_\alpha h_\alpha\right)\exp\left(\sum_{\alpha\in A_1}(-\xi_\alpha^* e_\alpha)\right) \qquad \text{(III,1,11)}$$

essendo le ξ_α, β_α legate alle ζ_α dalle (III,1,9a),(III,1,9b).

Osserviamo che il piú piccolo intorno aperto di $\underline{\zeta}=\underline{0}$ in cui la (III,1,9) ha senso é dato dalla condizione :

$$\|\zeta\| < \frac{\pi}{2}$$

in particolare si avrá , per ognuno degli ζ_i ; $|\zeta_i| < \frac{\pi}{2}$, in corrispondenza a tali valori accettabili ogni coo rdinata ξ_i assume valori in tutto il piano complesso . Possiamo afferma-re che le ζ_i sono delle coordinate compatte dello spazio omogeneo fattore mentre le ξ_i ne rappresentano la forma non compatta , la (III,1,9a) é una sorta di generalizzazione pluridimensionale della proiezione stereografica della sfera sul piano complesso ; quest'ultima si ottiene nel caso particolare di SU(2) (§ III,2)

Osserviamo inoltre che in corrispondenza dei vettori $\underline{\zeta} \in \mathbb{C}^m$ tali per cui $\|\underline{\zeta}\| = \frac{\pi}{2}$ la matrice corrispondente all'elemento $\exp[\sum_{\alpha\in A_1}(\zeta_\alpha f_\alpha - \zeta_\alpha^* e_\alpha)]$ è non regolare , essendo il primo elemento diagonale nullo ($\cos(\|\zeta\|) = \cos(\pi/2) = 0$) . In particolare essa puó essere scritta a blocchi come segue :

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & (-\alpha_j^*) \\ \hline (\alpha_i) & \delta_{ij} - \alpha_i \alpha_j^* \end{array}\right) \qquad \text{(III,1,12)}$$

Inoltre applicando un qualsiasi elemento del sottogruppo di stabilitá S_0 di G_0 si ottiene ancora un elemento non regolare; per verificare questa proprietá basta osservare che la matrice corrispondente ad un elemento di S puó essere blocchizzata come segue :

$$\exp\Big(\sum_{\alpha\notin A_1}(\eta_\alpha f_\alpha-\eta_\alpha^{*}e_\alpha)+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i h_{\alpha_i}\Big)=\left(\begin{array}{c|c}1 & \underline{0}\\ \hline \underline{0} & \underline{\underline{B}}\end{array}\right) \qquad (III,1,13)$$

essendo $\underline{\underline{B}}$ una matrice unitaria nxn .

É allora evidente che il prodotto di una matrice di tipo (III,1,12) per una matrice (III,1,13) da' ancora una matrice (III,1,12) , questo comporta che tutto il coset corrisponden- te all'elemento non regolare é esso stesso non regolare . Sfruttando la decomposizione (III,1,11) , gli stati coerenti sono parametrizzati dal vettore complesso $\underline{\xi}\in\mathbb{C}^m$ e saranno definiti da :

$$|\xi\rangle=\frac{\exp\big(\sum_{\alpha\in A_1}\xi_\alpha f_\alpha\big)\exp\big(\sum_{\alpha\in A_1}\beta_\alpha h_\alpha\big)\exp\big(\sum_{\alpha\in A_1}(-\xi_\alpha^{*}e_\alpha)\big)|1,\lambda\rangle}{\langle 1,\lambda|\exp\big(\sum_{\alpha\in A_1}\xi_\alpha f_\alpha\big)\exp\big(\sum_{\alpha\in A_1}\beta_\alpha h_\alpha\big)\exp\big(\sum_{\alpha\in A_1}(-\xi_\alpha^{*}e_\alpha)\big)|1,\lambda\rangle}=$$

$$=\frac{\exp\big(\sum_{\alpha\in A_1}\xi_\alpha f_\alpha\big)|1,\lambda\rangle}{\langle 1,1|\exp\big(\sum_{\alpha\in A_1}\xi_\alpha f_\alpha\big)|1,\lambda\rangle}=|1,\lambda\rangle+\sum_{k=1}^{m}\xi_k|1,\mu_k\rangle=\begin{pmatrix}1\\ \underline{\xi}\end{pmatrix}$$

avendo qui sfruttato il fatto che e_α ,$h_\alpha\in\mathfrak{S}_0$ e le espressioni esplicite (matriciali) degli operatori e dei vettori introdot- ti.

In questo schema il prodotto scalare tra due stati coerenti é dato da :

$$\langle\xi'|\xi\rangle=\Big(\langle 1,\lambda|+\sum_{k=1}^{m}\xi_k'^{*}\langle 1,\mu_k|\Big)\Big(|1,\lambda\rangle+\sum_{k=1}^{m}\xi_k|1,\mu_k\rangle\Big)=1+\sum_{k=1}^{m}\xi_k'^{*}\xi_k$$

La realizzazione dello spazio della rappresentazione come spazio di funzioni si costruisce nel modo seguente : sia $\underline{\alpha} \in \mathbb{C}^{n+1}$ $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \tilde{\alpha} \end{pmatrix}$ un generico vettore complesso , scriveremo $|\alpha\rangle = \alpha_0 |\lambda,\lambda\rangle + \sum_{k=1}^{n} \tilde{\alpha}_k |\lambda,\mu_k\rangle$; la funzione ad esso associata è data da :

$$\alpha(\xi) = \langle \xi | \alpha \rangle = \left(1 \,|\, \underline{\xi}^*\right) \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \tilde{\alpha} \end{pmatrix} = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \tilde{\alpha}_k \xi_k^*$$

In particolare le funzioni associate ai vettori $|\lambda, \mu_k\rangle$ della base di $\mathbb{C}^{n+1}$ sono dati da :

$$\mu_k(\xi) = \langle \xi | \lambda, \mu_k \rangle = \xi_k^* \qquad k = 1, \dots, n$$

$$\mu_\lambda(\xi) = \langle \xi | \lambda, \lambda \rangle = 1$$

Per quanto riguarda le proprietà metriche dello spazio omogeneo G_0/S_0 dovremo calcolare la funzione :

$$\| \langle \lambda,\lambda | \, U(\xi) \, | \lambda,\lambda \rangle \|^2$$

che , come abbbiamo dimostrato nel caso generale , dipende dalle sole coordinate che etichettano i punti del coset.
Consideriamo quindi :

$$\langle \lambda,\lambda | \exp\Big(\sum_{\alpha\in A_1} (\zeta_\alpha f_\alpha - \zeta_\alpha^* e_\alpha)\Big) | \lambda,\lambda \rangle = \langle \lambda,\lambda | \exp\Big(\sum_{\alpha\in A_1} \xi_\alpha f_\alpha\Big) \exp\Big(\sum_{\alpha\in A_1} \beta_\alpha h_\alpha\Big) \exp\Big(\sum_{\alpha\in A_1} (-\xi_\alpha^* e_\alpha)\Big) | \lambda,\lambda \rangle =$$

$$= \langle \lambda,\lambda | \exp\Big(\sum_{\alpha\in A_1} \beta_\alpha h_\alpha\Big) | \lambda,\lambda \rangle = \exp\Big(\sum_{k=1}^{n} \beta_k\Big) \langle \lambda,\lambda | \lambda,\lambda \rangle = \exp\Big(\sum_{k=1}^{n} \beta_k\Big)$$

dove si sono applicati gli esponenziali più esterni agli stati $\langle \lambda,\lambda |$, $| \lambda,\lambda \rangle$ lasciandoli invariati e dove si é sfruttato il fatto che gli h_α commutano e sono diagonali su $|\lambda,\lambda\rangle$ con autovalore 1 . Per esprimere $\exp(\sum_{k=1}^{m}\beta_k)$ in termini delle sole variabili ξ_i utilizziamo l'equazione (III,1,9) e la relazione $\cos\alpha=(1+tg^2\alpha)^{\frac{1}{2}}$, confrontando quindi con la (II,1,10) moltiplicata per la sua complessa coniugata sommata sull'indice i si ottiene :

$$\langle\lambda,\lambda|\exp\Big(\sum_{\alpha\in A_1}\zeta_\alpha f_\alpha-\zeta_\alpha^* e_\alpha\Big)|\lambda,\lambda\rangle=\exp\Big(\sum_{k=1}^{m}\beta_k\Big)=\big(1+\|\underline{\xi}\|^2\big)^{-1/2} \qquad \text{(III,1,14)}$$

Nella notazione del capitolo II si avrã allora :

$$d\mu(\xi)=d_\lambda\,\|\langle\lambda,\lambda|\,\mathcal{U}(\xi)|\lambda,\lambda\rangle\|^2 d\overset{\circ}{\xi}{}^2=\frac{n+1}{(1+\|\underline{\xi}\|^2)}\,d\overset{\circ}{\xi}$$

essendo $d\overset{\circ}{\xi}$ definita dalle (II ,3 ,11).

Per quanto riguarda la metrica Kähleriana $g_{i\bar{j}}$ abbiamo dalla relazione (II ,3,9) :

$$g_{i\bar{j}}=\frac{\partial^2}{\partial\xi^i\partial\xi^{j*}}\Big[\lg\|\langle\lambda,\lambda|\,\mathcal{U}(\xi)|\lambda,\lambda\rangle\|^{-2}\Big]=$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial\xi^i\partial\xi^{j*}}\Big[\lg\big(1+\|\underline{\xi}\|^2\big)\Big]=\frac{\delta_{ij}\big(1+\|\xi\|^2\big)-\xi^j\xi^{i*}}{\big(1+\|\xi\|^2\big)^2}$$

La 2-forma differenzile ad essa associata é data da :

$$\Phi=-2i\sum_{i,j}\frac{\delta_{ij}\big(1+\|\xi\|^2\big)-\xi^j\xi^{i*}}{\big(1+\|\xi\|^2\big)^2}\,d\xi^i\wedge d\xi^{j*}$$

In ultimo osserviamo che lo spazio omogeneo ottenuto in questo esempio é simmetrico in quanto il sottospazio $\mathcal{M}$ tangente allo spazio quoziente dato dalla (III,1,7) soddisfa la relazione :

$$[\mathbb{M},\mathbb{M}] \subset \mathbb{H} \cap \mathbb{SU}(n+1) \subset \mathbb{S}_0$$

che corrisponde alla (II,3,14).

§ (III,2) : "Stati Coerenti di SU(2)"

Studieremo in questo paragrafo gli stati coerenti di una qualsiasi rappresentazione irriducibile dell'algebra SU(2) definita a partire dall'algebra SL(2,C) costituita dagli operatori $\hat{J}_+, \hat{J}_-, \hat{J}_z$ le cui regole di commutazione sono :

$$[\hat{J}_z, \hat{J}_\pm] = \mp \hat{J}_\mp$$
$$[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2 J_z$$

Utilizzando le notazioni della Meccanica Quantistica possiamo etichettare una qualsiasi rappresentazione irriducibile di SU(2) con un numero intero o semidispari j , essendo 2j+1 la dimensione dello spazio della rappresentazione , il vettore di peso massimo sarà indicato da $|j,j\rangle$, e gli altri vettori della base da $|j,j-k\rangle$, essendo $k=0,1,\ldots,2j$; la rappresentazione di $\hat{J}_z, \hat{J}_+, \hat{J}_-$ su tale base è data da :

$$\hat{J}_z \, |j,j-k\rangle = (j-k)\, |j,j-k\rangle$$
$$\hat{J}_+ \, |j,j-k\rangle = [k(2j-k+1)]^{\frac{1}{2}} |j,j-k+1\rangle$$
$$\hat{J}_- \, |j,j-k\rangle = [(2j-k)(k+1)]^{\frac{1}{2}} |j.j-k-1\rangle$$

nella rappresentazione fondamentale si ha:

$$\hat{J}_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \hat{J}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{J}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Seguendo la trattazione svolta per il caso generale di SU(n+1) considereremo l'operatore $\exp(\zeta \hat{J}_- - \zeta^* \hat{J}_+)$ che agisce efficacemente sul vettore di peso massimo $|j,j\rangle$ e lo decomporremo secondo l'equazione (III,1,11) come segue :

$$\exp\left(\zeta\hat{J}^- - \zeta^*\hat{J}^+\right) = \exp\left(\xi\hat{J}^-\right)\exp\left(\beta\hat{J}_0\right)\exp\left(-\xi^* J^+\right)$$

con

$$\xi = \frac{\zeta}{|\zeta|}\,\mathrm{tg}(|\zeta|) \qquad \beta = \lg(\cos|\zeta|) = \lg\left(1+|\xi|^2\right)^{-1/2} \qquad (\mathrm{III},2,1)$$

ed essendo $j_0 = 2j_z$ (nella rappresentazione fondamentale $j_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$).

In questo caso particolare possiamo interpretare geometricamente la relazione tra ξ e ζ .Ponendo infatti :

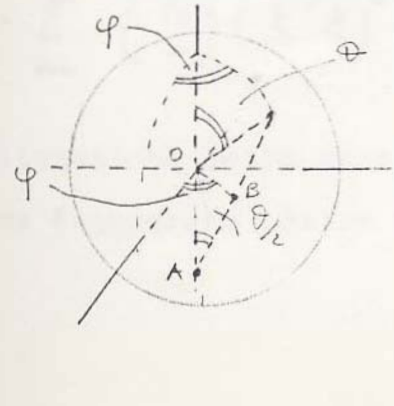
$$\zeta = \frac{\vartheta}{2}e^{i\varphi} \qquad \vartheta \in [0,\pi] \quad , \varphi \in [0,2\pi]$$

(é infatti ovvio dalla (III,2,1) che $|\xi|$ é una funzione periodica di $|\zeta|$ con periodo π ,ma consideriamo solamente $|\zeta| \in [0,\frac{\pi}{2}]$,poiché si passa all'intervallo $[-\pi/2,0]$ semplicemente modificando la fase φ).

Scriveremo dunque :

$$\xi = \frac{\zeta}{|\zeta|}\,\mathrm{tg}|\zeta| = e^{i\varphi}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

Interpretando le coordinate ϑ e φ come le usuali cooordinate polari sulla sfera , la ξ come la corrispondente coordinata sul piano $\mathbb{C}$,l'equazione che lega ξ a ϑ e φ é la proiezione stereografica della sfera.



$$\frac{OB}{OA} = \mathrm{Tg}\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = |\xi|$$

?

Gli stati coerenti di SU(2) nella rappresentazione j sono allora dati da :

$$|\xi, j\rangle = \frac{\exp(\zeta \hat{J}^- - \zeta^* \hat{J}^+)|j,j\rangle}{\langle j,j|\exp(\zeta \hat{J}^- - \zeta^* \hat{J}^+)|j,j\rangle} = \frac{\exp(\xi \hat{J}^-)|j,j\rangle}{\langle j,j|\exp(\xi \hat{J}^-)|j,j\rangle} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{(k!)} (\hat{J}^-)^k |j,j\rangle$$

si é sfruttato il fatto che, per qualsiasi $\xi \in \mathbb{C}$ si ha :

$$\langle \lambda, \lambda | \exp \xi \hat{J}^- | \lambda, \lambda \rangle = 1$$

Utilizzando la relazione :

$$(\hat{J}_-)^k |j,j\rangle = \frac{(2j!)^{\frac{1}{2}}(k!)^{\frac{1}{2}}}{((2j-k)!)^{\frac{1}{2}}} |j,j-k\rangle \qquad k \leq 2j$$

$$(\hat{J}_-)^k |j,j\rangle = 0 \qquad k > 2j$$

si avrá :

$$|\xi, j\rangle = \sum_{k=0}^{2j} \binom{2j}{k}^{1/2} \xi^k |j, j-k\rangle \qquad \text{(III,2,4)}$$

Il prodotto scalare tra due stati coerenti di questo tipo é dato da :

$$\langle \xi', j | \xi, j\rangle = \sum_{k=0}^{2j} \sum_{\ell=0}^{2j} \binom{2j}{k}^{1/2} \binom{2j}{\ell}^{1/2} (\xi'^*)^\ell \xi^k \langle j, j-\ell | j, j-k\rangle =$$

$$= \sum_{k=0}^{2j} \binom{2j}{k} (\xi'^* \xi)^k = (1 + \xi'^* \xi)^{2j} = \mathfrak{f}(\xi'^*, \xi) \qquad \text{(III,2,5)}$$

La generalizzazione dello spazio di Fock-Bargmann di funzioni sulla sfera é generato dalle funzioni associate ai vettori

$|j,j-k\rangle$ della base dello spazio $\mathbb{C}^{2j+1}$ della rappresentazione :

$$u_{j,j-k}(\xi) = \langle \xi, j \,|\, j, j-k \rangle = \binom{2j}{k} (\xi^*)^k$$

Per definire il prodotto scalare in termini di integrali sul piano complesso é necessario considerare la misura invariante definita sul piano complesso (inteso come proiezione stereografica della sfera) :

$$d\mathring{\xi} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^2} \, d\mathrm{Re}(\xi) \, d\,\mathrm{Im}(\xi)$$

dobbiamo successivamente calcolare il prodotto scalare :

$$\langle j,j| \exp(\xi \hat{J}^- - \xi^* \hat{J}^+) | j,j \rangle = \langle j,j | \exp(\xi \hat{J}^-) \exp(\beta \hat{J}_0) \exp(-\xi^* \hat{J}^+) | j,j \rangle =$$
$$= \langle j,j | \exp(2\beta \hat{J}_z) | j,j \rangle = \langle j,j | \exp(2j\beta) | j,j \rangle =$$
$$= \exp[\log(1+|\xi|^2)^{-J}] \langle j,j | \exp(\xi J^+) | j,j \rangle = (1+|\xi|^2)^{-J}$$

che coincide con la (III,1,14) nel caso della rappresentazione fondamentale j=1/2 , si sono qui applicate le proprietâ della rappresentazione di $\hat{J}_+, \hat{J}_-, \hat{J}_z$ e la (III,2,1) per l'espressione di β in funzione di ξ .

Ricordando inoltre che é $\langle \lambda,\lambda | \exp \xi \hat{J}_+ | \lambda,\lambda \rangle = 1$ ed applicando la formula (II,3,6c) per il prodotto scalare tra due stati arbitrari otteniamo :

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = d_\lambda \int d\tilde{\mu}(\xi) \, \psi_1^*(\xi) \, \psi_2(\xi) \, \| \langle \lambda,\lambda | \, U(\xi) \, | \lambda,\lambda \rangle \|^2 =$$
$$= \frac{2j+1}{\pi} \int \frac{d^2\xi}{(1+|\xi|^2)^2} \, \psi_1^*(\xi) \, \psi_2(\xi) \, \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{2J}} = ?$$
$$= \frac{2j+1}{\pi} \int \frac{d^2\xi}{(1+|\xi|^2)^{2(J+1)}} \, \psi_1^*(\xi) \, \psi_2(\xi)$$

La risoluzione dell'identitá é data da :

$$\hat{I} = \frac{2j+1}{\pi} \int \frac{d^2\xi}{(1+|\xi|^2)^{2(j+1)}} |\xi\rangle\langle\xi|$$

Sullo spazio di funzioni della rappresentazione l'algebra di Lie agisce come un'algebra di operatori ddifferenziali . É verifica immediata che :

$$\hat{J}_z \left(u_{j,j-k}(\xi)\right) = \left(j - \xi \frac{\partial}{\partial\xi} \right)\left(u_{j,j-k}(\xi)\right)$$

Poiché vale la $[d/d\xi \, , \xi]=1$ possiamo associare agli operatori differenziali degli operatori di Bose definiti su uno spazio di Fock arbitrario . Si ha quindi :

$$\hat{J}_z = b^+ b - j$$

e si interpretano i vettori di peso come stati di particella .

L'algebra é completata da :

$$\hat{J}_+ = b^+ (2j - b^+ b)^{1/2} \qquad \hat{J}_- = (2j - b^+ b)^{1/2}\, b$$

La rappresentazione cosí ottenuta é detta di Holstein-Primakoff . Dello spazio di Fock ausiliario si utilizza solo il sottospazio con numero di particelle minore o uguale di 2j . Per tali ragioni chiamiamo lo spazio di funzioni spazio di Fock-Bargmann. Esemplifichiamo ora, per il caso particolare di SU(2), quanto affermato precedentemente in generale sull'evoluzione dinamica . Seguendo la trattazione del caso generale utilizzeremo l'espressione del prodotto scalare tra due stati coerenti :

$$\langle \xi' | \xi \rangle = \mathcal{F}(\xi'^*, \xi) = (1 + \xi'^* \xi)^{2J}$$

La lagrangiana (II,3,5) é allora data da :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} i\hbar \left[\dot{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\lg (1+|\xi|^2)^{2J} \right] - \dot{\xi}^* \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left[\lg (1+|\xi|^2)^{2J} \right] \right] - \mathcal{H}(\xi^*, \xi)$$

$$= \frac{1}{2} i\hbar \left[2j \frac{\dot{\xi} \xi^*}{(1+|\xi|^2)} - 2j \frac{\dot{\xi}^* \xi}{(1+|\xi|^2)} \right] - \mathcal{H}(\xi^*, \xi) = \frac{j i\hbar}{(1+|\xi|^2)} (\dot{\xi} \xi^* - \dot{\xi}^* \xi) - \mathcal{H}(\xi^*, \xi)$$

Per scrivere le "equazioni del moto" in forma hamiltoniana dobbiamo introdurre la metrica nello spazio delle fasi (II,3,8)

$$g = \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \xi^*} \left[\lg (1+|\xi|^2)^{2J} \right] = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{2j \xi}{(1+|\xi|^2)} \right] =$$

$$= \frac{2j}{(1+|\xi|^2)^2} \left[1 + |\xi|^2 - |\xi|^2 \right] = \frac{2j}{(1+|\xi|^2)^2}$$

Le equazioni di Hamilton generalizzate sono quindi :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} = -i\hbar \frac{2j}{(1+|\xi|^2)^2} \dot{\xi}^*$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi^*} = i\hbar \frac{2j}{(1+|\xi|^2)^2} \dot{\xi}$$

Se l'hamiltoniana $\mathcal{H}(\xi^*, \xi) = \langle \xi | H | \xi \rangle$ é tale che conserva la coerenza allora la soluzione ξ (t) di queste equazioni fornisce una corrispondente evoluzione temporale $|\xi(t)\rangle$ dello stato quantistico , cioé una soluzione della corrispondente equazione di Schrödinger , che si mantiene coerente .
Considerando infine le regole di quantizzazione delle orbite alla Bohr-Sommerfeld la equazione (II ,4, 13) diventa :

$$2\pi\hbar m = \int i\hbar 2j \frac{1}{(1+|\xi|^2)^2} d\xi \wedge d\xi^* = 4\hbar j \int \frac{d^2\xi}{(1+|\xi|^2)^2}$$

dove si é sfruttato il fatto che $d\xi \wedge d\xi^* = 2i dRe(\xi) dIm(\xi)$. Per semplificare l'espressione dell'ultimo integrale passiamo alle coordinate sulla sfera (ϑ , φ) utilizzando la proiezione stereografica (III,2,1) :

$$\xi = e^{i\varphi}\, tg(\theta/2)$$

$$d\xi = d|\xi|\,|\xi|\, d\varphi$$

$$d|\xi| = d\left(tg\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) d\theta$$

Sostituendo nell'integrale :

$$\int \frac{d^2\xi}{(1+|\xi|^2)^2} = \frac{1}{2}\int d\varphi\, d\theta\, \frac{(1+tg^2(\theta/2))}{(1+tg^2(\theta/2))^2}\, tg(\theta/2) = \frac{1}{2}\int d\theta d\varphi\, tg\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int d\theta d\varphi\, \sin(\theta/2)\cos(\theta/2) = \frac{1}{4}\int d\theta\, d\varphi\, \sin\theta$$

la regola di quantizzazione diventa quindi :

$$\hbar j \int d\theta\, d\varphi \sin\theta = 2\pi\hbar m$$

dove l'integrale va pensato su una porzione di sfera . Considerando per esempio la calotta sferica individuata dalle condizioni :

$$\varphi \in [0, 2\pi) \quad , \quad \theta \in [0, \bar{\theta}] \quad , \quad \bar{\theta} \in [0, \pi]$$

avremo :

$$2\pi\hbar m = \hbar j\, 2\pi \int_0^{\bar{\theta}} d(-\cos\theta) = 2\pi\hbar j\, (\cos\theta)_{\bar{\theta}}^{0}$$

che fornisce le regole di quantizzazione per l'angolo $\bar{\vartheta}$:

$$1-\cos\bar{\vartheta} = \frac{m}{j} \quad \Rightarrow \quad \cos\bar{\vartheta} = \frac{j-m}{j}$$

§ (III,3) : "Stati Coerenti di SU(1,1)

Quale ultimo esempio consideriamo il caso del gruppo semisemplice non compatto SU(1,1) delle matrici 2x2 a determinante uguale ad 1,che lasciano invariata la forma $|z_1|^2-|z_2|^2$,essendo (z_1,z_2) un qualsiasi vettore di $\mathbb{C}^2$.
L'algebra di SU(1,1) é cistituita da tre generatori che indicheremo con k_0,k_+,k_- per i quali valgono le seguenti regole di moltiplicazione di Lie :

$$[k_0,k_\pm]=\mp 2k$$
$$[k_+,k_-]=-k_0$$

nella rappresentazione fondamentale tali generatori si scrivono :

$$k_0=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad k_+=\begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad k_-=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

É possibile costruire diverse rappresentazioni unitarie irriducibili di SU(1,1) caratterizzate peró dal fatto di essere di dimensione infinita;in particolare considereremo le rappresentazioni discrete (numerabili) dell'algebra corrispondente SU(1,1) : queste ultime sono etichettate da un numero $k>0$, ed i vettori della base ortonormale possono essere scritti nella forma $|k,n\rangle$ con $n=0,1,\ldots.$.
Su questa base l'elemento k_0 é diagonale :

$$k_0|k,m\rangle=2(k+m)|k,m\rangle$$

e gli stati $|k,m\rangle$ si ottengono dallo stato $|k,0\rangle$ come segue

$$|k,m\rangle = \left[\frac{\Gamma(2k)}{m!\,\Gamma(2k+m)} \right]^{\frac{1}{2}} (k_+)^m \, |k,0\rangle \qquad \text{(III,3,1)}$$

Possiamo quindi scegliere come stato di partenza il vettore $|k,0\rangle$ il cui sottogruppo di stabilitā é generato dal solo elemento k_0 dell'algebra . Parametrizzando , come nel caso di SU(n+1,n+1) lo spazio quoziente con gli elementi del sottospazio generato da k_+, k_- si avrā :

$$|\zeta,k\rangle = \frac{\exp(\zeta k_+ - \zeta^* k_-)|k,0\rangle}{\langle k,0|\exp(\zeta k_+ - \zeta^* k_-)|k,0\rangle}$$

É possibile anche per SU(1,1) una parametrizzazione diversa utilizzando una decomposizione analoga alla (III,1,11) :

$$\exp(\zeta k_+ - \zeta^* k_-) = \exp(\xi k_+)\exp(\beta k_0)\exp(-\xi^* k_-)$$

$$\xi = \frac{\zeta}{|\zeta|}\, tgh(|\zeta|) \qquad \beta = lg\,(1-|\xi|^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(III,3,2)}$$

La trasformazione (III,3,2) rappresenta la proiezione stereografica dell'iperboloide di rotazione in R^3 di vertici (0,0,1) sul disco di Poincaré di raggio unitario nel piano (x,y) interpretato come piano complesso . Osserviamo infatti che in corrispondenza a tutti i possibili valori del parametro $\zeta \in \mathbb{C}$ la coordinata ξ assume solo valori tali che sia $|\xi|<1$. Utilizzando la decomposizione (III,3,2) e ricordando la relazione (III,3,1) si ottiene , parametrizzando lo stato coerente con un punto ξ sul disco di Poincaré :

$$|\xi,k\rangle = \frac{\exp(\xi K_+)\exp(\beta K_0)\exp(-\xi^* K_-)|k,0\rangle}{\langle k,0|\exp(\xi K_+)\exp(\beta K_0)\exp(-\xi^* K_-)|k,0\rangle} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(m+2k)}{m!\,\Gamma(2k)}\right)^{1/2} \xi^m \,|k,n\rangle$$

Il prodotto scalare tra due stati coerenti é dato da :

$$\langle k,\xi'|\xi,k\rangle = (1-\xi'^*\xi)^{-2k}$$

e la risoluzione dell'identitá é data da :

$$\hat{I} = \int d\mu(\xi)\; |\xi,k\rangle\langle\xi,k| \qquad\qquad |\xi|<1$$

$$d\mu(\xi) = \frac{2k-1}{\pi}\left(1-|\xi|^2\right)^{2(k-1)} d^2\xi$$

Possiamo anche in questo caso realizzare lo spazio della rappresentazione come spazio (infinito dimensionale) di funzioni, associando una funzione ad ogni vettore $|k,n\rangle$ della base ortonormale come segue :

$$u_{k,m}(\xi) = \langle\xi,k|k,m\rangle = \left[\frac{\Gamma(m+2k)}{m!\,\Gamma(2k)}\right]^{1/2} \xi^m$$

la rappresentazione dell'algebra su tale spazio di Hilbert é analoga alla rappresentazione di Holatein-Primakoff per SU(2) ; precisamente si hanno le identificazioni :

$$\hat{K}_z^{(k)} = \frac{1}{2}K_0^{(k)} = \xi\frac{d}{d\xi} + k = b^+b + k$$

$$K_+^{(k)} = b^+(2k+b^+b)^{1/2}$$

$$K_-^{(k)} = (2k+b^+b)^{1/2}\, b$$

APPENDICE

DIMOSTRAZIONE DELLA RELAZIONE (II,3,6)

Dimostriamo ora la relazione di ortogonalità (II,3,6)

$$\int_G \langle\psi_1|U(g)|\psi_2\rangle^* \langle\psi_3|U(g)|\psi_4\rangle dg = d_\lambda^{-1} \langle\psi_2|\psi_4\rangle\langle\psi_3|\psi_1\rangle$$

(1) consideriamo un set di vettori indipendenti nello spazio della rappresentazione $\{|i\rangle\ ;\ i=1,\dots,d_\lambda\}$ ed introduciamo gli elementi di matrice $U_{ij}(g)=\langle i|U(g)|j\rangle$

(2) dimostriamo la relazione :

$$\int_G U_{j'i'}(g^{-1})\, U_{ij}(g)\, dg = P_{jj'}^{(ii')} = \delta_{jj'}\,\delta_{ii'}\, d_\lambda^{-1} \qquad \text{(i)}$$

operiamo con la $P_{jj'}^{(ii')}$ su un elemento della rappresentazione $U(g_0)$

$$(P^{ii'} U(g_0))_{j'k} = \sum_j \int_G U_{j'i'}(g^{-1})\, U_{ij}(g)\, U_{jk}(g_0)\, dg =$$

$$= \int_G U_{j'i'}(g^{-1})\, U_{ik}(g g_0)\, dg = \int_G U_{j'i'}(g_0 g_0^{-1} g^{-1})\, U_{ik}(g g_0)\, dg =$$

$$= \sum_\ell \int_G U_{j'\ell}(g_0)\, U_{\ell i'}(g_0^{-1} g^{-1})\, U_{ik}(g g_0)\, dg =$$

$$= \sum_\ell U_{j'\ell}(g_0) \int_G U_{\ell i'}((g g_0)^{-1})\, U_{ik}(g g_0)\, dg =$$

per la proprietà dell'integrazione di essere rigth-invariant e per la formula (i) ottengo :

$$= \sum_\ell U_{j\ell}(g_0)\, P_{\ell k}^{(ii')} = (U(g_0) P^{(ii')})_{j'k}$$

Allora osserviamo che gli operatori $P^{ii'}$ commutano con tutti gli operatori U(g) della rappresentazione irriducibile di U quindi sono multipli dell'identità (Lemma di Schur) :

$$P_{jj'}^{(ii')} = a^{(ii')} \delta_{jj'} \qquad \text{(ii)}$$

per calcolare i coefficienti $a^{ii'}$ calcoliamo la traccia di $P^{(ii')}$

$$\sum_j P_{jj}^{(ii')} = \sum_j \int_G U_{ji'}(g^{-1}) U_{ij}(g)\, dg = \int_G U_{ii'}(gg^{-1})\, dg =$$

$$= \delta_{ii'} \int_G dg = \delta_{ii'}$$

poiché scegliamo logicamente la misura normalizzata ad 1. D'altro canto possiamo scrivere dalla (ii)

$$\sum_j P_{jj}^{(ii')} = \sum_j a^{(ii')} \delta_{jj} = d_l\, a^{(ii')}$$

Confrontando le due espressioni ottenute per $\sum_j P_{jj}^{(ii')}$ otteniamo

$$a^{(ii')} = d_l^{-1} \delta_{ii'}$$

e quindi

$$P_{jj'}^{(ii')} = d_l^{-1} \delta_{ii'} \delta_{jj'} \qquad \text{(iii)}$$

Considerando quindi

$$\int_G \langle \psi_1 | U(g) | \psi_2 \rangle^* \langle \psi_3 | U(g) | \psi_4 \rangle\, dg =$$

Introducendo la risoluzione dell'identità espressa con i vettori $|i\rangle$ si ha :

$$= \sum_{i,j,k,l} \int_G \langle\psi_1|i\rangle^* \langle i|U(g)|j\rangle^* \langle j|\psi_2\rangle^* \langle\psi_3|k\rangle\langle k|U(g)|l\rangle\langle l|\psi_4\rangle \, dg =$$

$$= \sum_{i,j,k,l} \langle i|\psi_1\rangle\langle\psi_2|j\rangle\langle\psi_3|k\rangle\langle l|\psi_4\rangle \int_G U_{ij}^*(g)\, U_{kl}(g)\, dg$$

poiché $\quad U_{ij}^*(g) = U_{ji}^+(g) = U_{ji}^{-1}(g) = U_{ji}(g^{-1})$

$$= \sum_{i,j,k,l} \langle i|\psi_1\rangle\langle\psi_2|j\rangle\langle\psi_3|k\rangle\langle l|\psi_4\rangle \int_G U_{ji}(g^{-1})\, U_{kl}(g)\, dg$$

$$= \sum_{i,j,k,l} \langle i|\psi_1\rangle\langle\psi_2|j\rangle\langle\psi_3|k\rangle\langle l|\psi_4\rangle \; P_{jl}^{(ik)} =$$

$$= \sum_{i,j,k,l} \langle i|\psi_1\rangle\langle\psi_2|j\rangle\langle\psi_3|k\rangle\langle l|\psi_4\rangle \; d_\lambda^{-1} \delta_{ik}\delta_{jl}$$

$$= d_\lambda \sum_{i,j} \langle i|\psi_1\rangle\langle\psi_2|j\rangle\langle\psi_3|i\rangle\langle j|\psi_4\rangle = d_\lambda^{-1} \langle\psi_3|\psi_1\rangle\langle\psi_2|\psi_4\rangle$$

che é esattamente la (II,3,6) di §(II,3).

BIBLIOGRAFIA

CAPITOLO I

[1] Schrödinger E. — "Naturwissenschaften",14,664 (1926)

[2] Glauber R. — "Phys.Rev",131,2766 (1966)

[3] Bargamann V., Butera P., Girardello L., Klauder J. — "Rep.Math.Phys.",2,221 (1971)

[4] Von Neumann J. — "Mathematical foundations of Quantum Mechanics",Princeton,1955

[5] Bargamann V. — "Comm. pure and appl. Math", 14,187 (1961)

[6] Schweber S.S. — "J. Math. Phys.",3,831 (1962)

[7] Feynman R.P. — "Revs. Modern Phys",20,367 (1948)

[8] Klauder J.R. — "Ann. Phys."(New York),11,123 (1960)

[9] AA.VV. — "Quantum Optics",S.M.Kay and A.Maitland eds.,London and New York,Academic Press,1970

[10] Weiss G.H., Meradudin A.A. — "J. Math. Phys.",3,771 (1962)

[11] Walls D.F., — "Nature",306,141 (1983) Squeezed state

CAPITOLO II

[12] Matsushima Y. — "Differentiable Manifolds", Marcel Dekker inc.,New York,1972

[13] Perelomov A.M. — "Comm. Math. Phys.",26,222 (1972)

[14] Helgason S. — in "Battelle Rencontres", C.M de Witt and J.A.Wheehler eds, W.A. Benjamin , New York

[15] Naïmark M.,Stern A. — "Theorie des rêpresentations des groupes",Ed. M.I.R.,Moscou,1979

[16]	Mc.Donald I.G.	in "Theory of Lie groups", Lecture notes series , London Math. Soc.,M.F. Atyah et al. eds.,Cambrige Universiy Press,1979
[17]	Helgason S.	"Differential geometry and symmetric spaces",New York,Academic Press,1962
[18]	Perelomov A.M.	"Sov. Phys. Usp.",20(9),Sept (1977)
[19]	Kobajashi S., Nomizu K.	"Foundations of differential geometry",Wiley and Sons,New York,1969
[20]	Kuratsuji H., Suzuki T.	Repr. from "Progr. Theor. Phys.", suppl. Nos. 74 & 75 (1983)
[21]	D'Ariano G., Rasetti M., Vadacchino	"J. of Phys. A" (in corso di stampa).

INDICE