

Indice

1	Introduzione	3
2	Stati quantistici della radiazione	7
2.1	Introduzione	7
2.2	Quantizzazione del campo elettromagnetico	8
2.3	Stati coerenti e stati squeezed	10
2.4	Rappresentazioni P e Q di stati coerenti e squeezed	16
3	Metodi di rivelazione della radiazione elettromagnetica	19
3.1	Introduzione	19
3.2	Il beam splitter ed il convertitore di frequenza	20
3.3	Rivelazione diretta	22
3.4	Rivelazione homodyne	24
3.5	Rivelazione heterodyne	26
3.6	Figure di rumore del beam splitter	29
4	Amplificatori di campo	31

4.1	Introduzione	31
4.2	Amplificazione laser in fibre ottiche attive	32
4.3	Amplificatore Phase Insensitive (PIA)	35
4.4	Amplificatore phase sensitive	41
5	Utilizzo del beam splitter in una rete di comunicazione	44
5.1	Introduzione	44
5.2	Il rubinetto ottico	45
5.3	Il rubinetto ottico preamplificato	47
6	Amplificatori di numero	49
6.1	Introduzione	49
6.2	L'amplificatore ideale di numero	51
6.3	Il duplicatore di numero di fotoni (PND)	56
6.4	Ottimizzazione della conversione di numero	59
6.5	Risultati Numerici	61
7	Conclusioni	66
8	Bibliografia	68

Capitolo 1

Introduzione

La fotonica può essere definita come quel settore della scienza e della tecnica in cui l'informazione viene manipolata e gestita mediante fotoni, anziché mediante gli elettroni, come nel caso dell'elettronica. Questo nuovo e affascinante settore è ancora alla sua infanzia e costituisce sicuramente una disciplina in divenire.

Tuttavia, la fotonica ha già raggiunto successi scientifici e tecnologici di grande rilievo. Il compact disc, la stampante laser, i milioni di chilometri di fibre ottiche per telecomunicazioni posati in tutto il mondo costituiscono esempi significativi di realizzazioni fotoniche.

Storicamente la fotonica trae le sue origini dall'invenzione del laser e dallo sviluppo dei materiali adatti a costruire fibre ottiche a bassissima attenuazione, ma il motore che spinge questa nuova scienza deriva essenzialmente dalle enormi necessità connesse allo sviluppo delle telecomunicazioni, delle tecnologie multimediali, del calcolo parallelo neurale e, in generale, dalla

telematica. È pertanto impossibile prevedere quali sorprese deriveranno da uno sviluppo che si preannuncia così imponente.

Rischia di essere fuorviante cercare di stabilire un parallelismo tra fotonica ed elettronica, per poter predire, dagli sviluppi della seconda, le potenzialità della prima. Infatti confrontare il CD con i nastri magnetici o le fibre ottiche con i cavi coassiali può essere utile in termini di variabili economiche, ma sicuramente non serve a stabilire parallelismi tra le due tecnologie. Il confronto in termini di prestazioni può essere un esempio di quanto sia inadeguato il tentativo di paragonare le due tecnologie. Per esempio, nel caso delle fibre ottiche, ci si accorse subito che, rispetto ai normali cavi, possiedono doti di attenuazione del segnale e di leggerezza molto migliori. Ma, forse, non ci si accorse subito che una delle proprietà più importanti delle fibre ottiche è che, rispetto ai cavi coassiali, esse sono in grado di trasmettere una banda praticamente “infinita” di frequenze. Quest’ultima proprietà, dunque, non è stata all’inizio quella che ha determinato il miglioramento e la diffusione delle fibre, ma oggi è quello che lascia intravedere lo sviluppo più ampio e non preventivato.

La fotonica procede quindi con una logica essenzialmente interna, e, rispetto ad essa, l’elettronica si posiziona come la tecnologia che ha finora concretizzato principalmente il mondo delle informazioni. Tuttavia negli ultimi dieci anni le fibre ottiche sono divenute il mezzo di comunicazione principale per i collegamenti punto-punto nelle reti di giunzione e a lunga distanza. Nei

paesi economicamente avanzati più del 50 per cento del traffico telefonico viaggia su fibre ottiche. Dal 1988 i collegamenti transoceanici via cavo sono basati su fibre ottiche : ciò conferma il grado di maturazione e di affidabilità raggiunto da questa tecnologia, considerati i requisiti di durata ed affidabilità che i collegamenti sottomarini devono soddisfare.

La prospettiva di incrementi di traffico e di sviluppo di nuovi servizi che, comportando la trasmissione multimediale di voci, dati e immagini richiedono capacità trasmissive via via crescenti, fornisce la spinta per nuovi approcci tecnologici: da una parte l'estensione della rete ottica ai singoli utenti, dall'altra l'impiego di tecnologie che garantiscano al tempo stesso l'ottenimento di elevate prestazioni e convenienza economica. Tra queste appaiono particolarmente interessanti le tecniche fotoniche.

Il primo capitolo di questa tesi illustra gli stati quantistici del campo e. m. che si prestano a trasportare un segnale in una rete di distribuzione ottica: gli stati coerenti, gli stati numero e gli stati squeezed. In seguito (Cap. 2) viene descritto il funzionamento del beam splitter ed il suo utilizzo nei diversi schemi di rilevazione della radiazione con particolare attenzione alla degradazione del segnale dovuta all'apparato di misura (figure di rumore). Nel capitolo 3 vengono esaminati i principi di funzionamento di alcuni tipi di amplificatori di campo, mettendo in evidenza l'utilità di questi allo scopo di migliorare le figure di rumore del rubinetto ottico di derivazione ad un utente della rete. Il capitolo 6 è dedicato alla descrizione ed allo studio

numerico del funzionamento dell'amplificatore e del duplicatore di numero di fotoni. Il primo viene indicato come il dispositivo adatto ad implementare le prestazioni del rubinetto ottico nel caso in cui il segnale venga rilevato dall'utente in modo diretto; il secondo viene invece proposto come alternativa al rubinetto ottico essendo teoricamente in grado di generare due copie del segnale di ingresso.

Capitolo 2

Stati quantistici della radiazione

2.1 Introduzione

Attualmente i sistemi di comunicazione che utilizzano luce coerente stanno raggiungendo uno stadio in cui l'errore commesso nel misurare il segnale trasmesso e l'efficienza di canale sono limitati dalla natura quantistica della radiazione. Tuttavia sono stati recentemente sviluppati nuovi stati quantistici del campo detti stati squeezed, grazie ai quali è possibile, in linea di principio, ridurre il rumore quantistico nella misurazione del campo che trasporta il segnale.

In questo capitolo, dopo brevi cenni di richiamo alla quantizzazione del campo, vengono descritti e confrontati tra loro gli stati coerenti e gli stati squeezed, mentre nei capitoli successivi sono discusse alcune possibili applicazioni.

2.2 Quantizzazione del campo elettromagnetico

Dalle equazioni di Maxwell per il campo e.m. nel vuoto discendono le espressioni per l'equazione di D'Alambert delle onde

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}, \quad (2.1)$$

e per l'energia del campo e.m.

$$H = \frac{1}{2} \int (\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mathbf{H}^2) dv \equiv \frac{1}{2} \int \left[\epsilon_0 \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{A})^2 \right] dv. \quad (2.2)$$

La (2.2) è una equazione differenziale a variabili separabili che ha come soluzione generale

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_l \sum_{\sigma=1}^2 \mathbf{e}_{l\sigma} \left\{ A_{l\sigma}(t) e^{i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}} + A_{l\sigma}^*(t) e^{-i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}} \right\}, \quad (2.3)$$

dove $\mathbf{e}_{l\sigma}$ è il vettore che indica la polarizzazione. Sostituendo questa soluzione nella (2.1) e tenendo conto della condizione di trasversalità

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \longrightarrow \mathbf{e}_{l\sigma} \cdot \mathbf{k}_l = 0, \quad (2.4)$$

si ottengono per le componenti di Fourier del potenziale vettore equazioni dinamiche di oscillatore

$$\ddot{A}_{l\sigma} + \omega_{l\sigma}^2 A_{l\sigma} = 0. \quad (2.5)$$

Sostituendo la soluzione generale (2.3) nella espressione per l'energia (2.2) si ottiene

$$H = \epsilon_0 v \sum_l \sum_{\sigma=1}^2 \mathbf{e}_{l\sigma} \left\{ \mathbf{A}_{l\sigma}(t) \cdot \mathbf{A}_{l\sigma}^*(t) + \mathbf{A}_{l\sigma}^*(t) \cdot \mathbf{A}_{l\sigma}(t) \right\}. \quad (2.6)$$

Si noti che l'Hamiltoniana (2.6) è una costante del moto ed ha la forma di una somma di Hamiltoniane di oscillatori indipendenti, uno per ogni modo del campo. La quantizzazione procede scrivendo l'Hamiltoniana (2.6) nella forma standard mediante operatori di creazione ed annichilazione per i modi del campo

$$\hat{H} = \sum_{l\sigma} \hbar\omega_l (a_{l\sigma}^\dagger a_{l\sigma} + 1/2) . \quad (2.7)$$

Ne discende la relazione che quantizza il campo $\hat{\mathbf{A}}$ nello schema di Heisenberg

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_l \sum_{\sigma=1}^2 \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_l \epsilon_0 v}} \mathbf{e}_{l\sigma} \{ a_{l\sigma}(t) e^{i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}} + a_{l\sigma}^*(t) e^{-i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}} \} . \quad (2.8)$$

Il campo elettrico a sua volta si riscrive come segue

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) &= \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) , \\ \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= i \sum_{l\sigma} \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\epsilon_0 v}} \mathbf{e}_{l\sigma} a_{l\sigma} e^{i(\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r} - \omega_l t)} , \end{aligned} \quad (2.9)$$

dove $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}$, detto "parte a frequenza positiva", è l'Hermitiano coniugato di $\hat{\mathbf{E}}^{(-)}$. Lo spazio di Hilbert degli stati del campo è generato dagli autovettori degli operatori numero di ogni modo

$$|\psi\rangle = |n_{1,1}\rangle |n_{1,2}\rangle |n_{2,1}\rangle |n_{2,2}\rangle \dots |n_{l,\sigma}\rangle \dots \equiv |n_{1,1}, n_{1,2}, n_{2,1}, n_{2,2}, \dots, n_{l,\sigma}\rangle . \quad (2.10)$$

dove

$$a_{l\sigma}^\dagger a_{l\sigma} |\dots, n_{l\sigma}, \dots\rangle = n_{l\sigma} |\dots, n_{l\sigma}, \dots\rangle , \quad (2.11)$$

dove $n_{l\sigma}$ rappresenta il numero di fotoni nel modo $l\sigma$. Combinazioni lineari di vettori (2.10) generano stati "puri" del campo; più in generale gli stati

”misti” verranno associati alle matrici densità $\hat{\rho}$ ottenute mediante combinazioni lineari normalizzate di proiettori su stati puri. I vettori di stato (2.10) si possono ottenere tutti dal vuoto $|\Omega\rangle = |0, 0, \dots, 0, \dots\rangle$ (inteso come totale assenza di fotoni in ogni modo) mediante l’applicazione ripetuta degli operatori di creazione

$$|\{n_{l\sigma}\}\rangle = \bigotimes_{l\sigma} |n_{l\sigma}\rangle = \prod_{l\sigma} \frac{(a^\dagger)^{n_{l\sigma}}}{\sqrt{n_{l\sigma}!}} |\Omega\rangle . \quad (2.12)$$

Nello stato di vuoto il campo ha valore medio nullo, ma sono presenti le fluttuazioni di ”punto zero”

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \hat{\mathbf{E}} | \Omega \rangle &= 0 , \\ \langle \Omega | \Delta \hat{\mathbf{E}}^2 | \Omega \rangle &= \frac{1}{v\epsilon_0} \sum_{l\sigma} \frac{\hbar\omega_l}{2} . \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.3 Stati coerenti e stati squeezed

In elettrodinamica quantistica tutte le quantità di interesse sono riconducibili al calcolo delle funzioni di Green $G^{(n)}(\mathbf{r}_1, t_1; \dots; \mathbf{r}_n, t_n)$

$$G^{(n)} = \text{Tr} \left[\hat{\rho} \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \dots \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_n, t_n) \cdot \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) \dots \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}_n, t_n) \right] . \quad (2.14)$$

Esse rappresentano medie di ensemble dei campi con ordinamento ”normale” ovvero con $\hat{\mathbf{E}}^{(-)}$ sulla sinistra ed $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}$ sulla destra.

Gli stati cosiddetti "coerenti", introdotti da Glauber per descrivere l'alto grado di coerenza della luce laser, soddisfano la condizione di coerenza a tutti gli ordini ovvero la funzione di Green è fattorizzata a tutti gli ordini come segue

$$G^{(n)} = \langle \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \dots \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_n, t_n) \rangle = \mathcal{E}^*(\mathbf{r}_1, t_1) \dots \mathcal{E}(\mathbf{r}_n, t_n), \quad (2.15)$$

dove

$$\langle E^{(+)}(\mathbf{r}_n, t_n) \rangle = \mathcal{E}^*(\mathbf{r}_n, t_n). \quad (2.16)$$

La condizione è soddisfatta dagli autostati dell'operatore campo elettrico $\hat{E}^{(+)}$

$$\hat{E}^{(+)}|\rangle = \mathcal{E}|\rangle. \quad (2.17)$$

Dalla (2.9) segue che tali autostati si possono scrivere come prodotti diretti di autostati di operatore di distruzione $\hat{a}_{l\sigma}$

$$|\rangle \equiv |\{\alpha_{l\sigma}\}\rangle = \otimes_{l\sigma} |\alpha_{l\sigma}\rangle. \quad (2.18)$$

Concentriamo ora l'attenzione su un singolo modo del campo, indicando, per semplificare la notazione, con $|\alpha\rangle$ l'autostato dell'operatore a di annichilazione di un modo fissato.

Per costruire gli stati $|\alpha\rangle$ partendo dal vuoto è necessario introdurre l'operatore spostamento $\hat{D}(\alpha)$ che agisce nel modo seguente

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle, \quad (2.19)$$

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a) , \quad (2.20)$$

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) a \hat{D}(\alpha) = a + \alpha . \quad (2.21)$$

È facile verificare che lo stato $|\alpha\rangle$ così definito è un autostato di a . Si ha

$$a|\alpha\rangle = a\hat{D}(\alpha)|0\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{D}^\dagger(\alpha)a\hat{D}(\alpha)|0\rangle = \quad (2.22)$$

$$= \hat{D}(\alpha)(a + \alpha)|0\rangle = \alpha\hat{D}(\alpha)|0\rangle = \alpha|\alpha\rangle . \quad (2.23)$$

La rappresentazione numero dello stato coerente $|\alpha\rangle$ si ottiene mediante la formula di Becker-Campbell-Hausdorff ¹ come segue

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle , \quad (2.25)$$

e la distribuzione di probabilità nella rappresentazione numero è

$$|\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} , \quad (2.26)$$

ovvero una distribuzione di Poisson con valore medio e scarto quadratico medio

$$\langle \alpha|\hat{n}|\alpha\rangle = \langle \alpha|\Delta\hat{n}^2|\alpha\rangle = |\alpha|^2 . \quad (2.27)$$

Per stati in genere non coerente si introduce la quantità

$$F = \frac{\langle \Delta\hat{n}^2 \rangle}{\langle \hat{n} \rangle} , \quad (2.28)$$

¹Formula di Becker-Campbell-Hausdorff: se \hat{A} e \hat{B} sono due operatori, vale la

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]} \quad (2.24)$$

detta fattore di Fano. Per la distribuzione di Poisson si ha $F = 1$, mentre vengono generalmente detti stati "subpoissoniani" quelli con $F < 1$ e superpoissoniani quelli con $F > 1$. La distribuzione numero è il risultato della misura diretta dell'intensità del campo ottenuta per esempio per mezzo di un fotodiodo. La misura dell'ampiezza del campo ad una fissata frequenza sfasata di ϕ rispetto ad un oscillatore locale sincrono si ottiene invece mediante un rivelatore homodyne e corrisponde alla misura dell'osservabile:

$$a_\phi = \frac{1}{2} (ae^{i\phi} + a^\dagger e^{-i\phi}) . \quad (2.29)$$

Dall'espressione del campo elettrico nella rappresentazione di Heisenberg $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$ discende che due quadrature sfasate di $\pi/2$ sono variabili canonicamente coniugate analoghe alla posizione e momento dell'oscillatore armonico

$$\hat{q} \equiv \sqrt{2}a_\phi , \quad \hat{p} \equiv \sqrt{2}a_{\phi+\pi/2} . \quad (2.30)$$

I valori medi e gli scarti quadratici medi della quadratura a_ϕ nei casi del vuoto e dello stato coerente sono

$$\langle \Omega | a_\phi | \Omega \rangle = 0 , \quad \langle \alpha | a_\phi | \alpha \rangle = \alpha_\phi = e^{i\phi} \alpha + e^{-i\phi} \alpha^* , \quad (2.31)$$

$$\langle \Omega | \Delta a_\phi^2 | \Omega \rangle = \frac{1}{4} , \quad \langle \alpha | \Delta a_\phi^2 | \alpha \rangle = \frac{1}{4} . \quad (2.32)$$

Lo stato coerente ha quindi le stesse fluttuazioni di quadratura del vuoto: il rumore non dipende nè da α nè dalla fase ϕ ovvero è "isotropo".

La distribuzione di probabilità nelle quadratura è Gaussiana. Il prodotto delle indeterminazioni soddisfa la relazione di indeterminazione di Heisenberg con il segno di uguaglianza, ovvero

$$\langle \Delta a_\phi^2 \rangle \langle \Delta a_{\phi+\pi/2}^2 \rangle = \frac{1}{16}. \quad (2.33)$$

Gli stati coerenti sono quindi stati di minima indeterminazione.

Gli stati squeezed sono anch'essi stati di minima indeterminazione, ma anisotropi in fase, cioè con la fluttuazione nella quadratura dipendente dalla fase della quadratura stessa

$$\begin{aligned} \langle \Delta a_\phi^2 \rangle \langle \Delta a_{\phi+\pi/2}^2 \rangle &= \frac{1}{16} - , \\ \langle \Delta a_\phi^2 \rangle &= f(\phi). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Essi si costruiscono mediante l'operatore $\hat{S}(\zeta)$ di Squeezing introdotto da Yuen [1]

$$\hat{S}(\zeta) = \exp \left[\frac{1}{2} \left(\zeta (a^\dagger)^2 - \zeta^* a^2 \right) \right],$$

che opera la trasformazione di campo

$$\hat{S}^\dagger(\zeta) a \hat{S}(\zeta) = \mu a + \nu a^\dagger, \quad \mu = \cosh \rho, \quad \nu = e^{i\psi} \sinh \rho, \quad \zeta = \rho e^{i\psi}.$$

Facendo agire l'operatore di squeezing sul vuoto e, successivamente, "spostando" lo stato ottenuto si ottiene lo stato squeezed

$$|\alpha, \zeta\rangle = \hat{D}(\alpha) \hat{S}(\zeta) |0\rangle.$$

La distribuzione dello stato $|\alpha, \zeta\rangle$ sulla quadratura a_ϕ è ancora di tipo gaussiano con valore medio $\langle a_\phi \rangle = \alpha_\phi$, ma con fluttuazioni ϕ -dipendenti [2]

$$\langle \Delta a_\phi^2 \rangle = \frac{1}{4} [\sinh 2\rho \cos(2\phi - \psi) + \cosh 2\rho] . \quad (2.35)$$

È questa la differenza fondamentale tra stati coerenti e stati squeezed: "spremendo" uno stato coerente, per ottenere uno stato squeezed, si diminuisce il rumore in una quadratura a scapito di quello della quadratura coniugata, mantenendo la condizione di minima indeterminazione: ciò porta ad una diminuzione del rumore in rivelazione homodyne per la quadratura spremuta. Caso particolare di stato squeezed è il "vuoto squeezed", ovvero lo stato $|0, \zeta\rangle = \hat{S}(\zeta)|0\rangle$ ottenuto applicando l'operatore di squeezing al vuoto. Esso è caratterizzato da $\langle a \rangle = 0$, ma è non vuoto di fotoni ($\langle \hat{n} \rangle > 0$).

Più in generale, per stati qualunque, il rumore della quadratura viene confrontato con quello del vuoto introducendo il fattore di squeezing S_ϕ che rappresenta la fluttuazione di una quadratura a_ϕ del campo sullo stato squeezed divisa per la corrispondente fluttuazione del vuoto $\langle \Delta a_\phi^2 \rangle_0 = 1/4$

$$S_\phi = 4\langle \Delta a_\phi^2 \rangle . \quad (2.36)$$

Dalla (2.35) per $\phi = \psi = 0$ si ricavano i fattori di squeezing per le quadrature coniugate

$$S_0 = e^{2\rho} , \quad S_{\pi/2} = e^{-2\rho} . \quad (2.37)$$

La distribuzione nel numero (\hat{n}), diversamente da quella degli stati coerenti, non è in generale Poissoniana. Infatti il fattore di Fano in generale

dipende dal *parametro di squeezing* ζ

$$F = \frac{\langle \Delta \hat{n}^2 \rangle}{\langle \hat{n} \rangle} = F = \frac{2|\mu\nu|^2 + |\mu\alpha + \nu\bar{\alpha}|^2}{|\alpha|^2 + |\nu|^2}. \quad (2.38)$$

2.4 Rappresentazioni P e Q di stati coerenti e squeezed

Figura 2.1: funzioni Q per il vuoto (stato numero) e stato coerente

Gli stati coerenti sono un set *over*completo di stati non ortogonali ovvero l'operatore identico $\sum_{nn}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \hat{I}$ può essere espresso come segue

$$\int_C \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha| = \hat{I}. \quad (2.39)$$

Figura 2.2: rappresentazione Q per vuoto squeezed e stati squeezed

L'overcompletezza comporta che un generico operatore possa essere scritto come sovrapposizione di proiettori coerenti. In particolare, per la matrice densità si scrive

$$\hat{\rho} = \int d^2\alpha P(\alpha) |\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad (2.40)$$

dove

$$\int d^2\alpha P(\alpha) = 1. \quad (2.41)$$

Queste relazioni descrivono la rappresentazione P: $P(\alpha)$ non è in generale positiva e viene detta per questo *quasiprobabilità*.

Al contrario, la funzione $Q(\alpha)$

$$Q(\alpha) = \langle\alpha|\hat{\rho}|\alpha\rangle \quad (2.42)$$

normalizzata come segue

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} Q(\alpha) = 1, \quad (2.43)$$

è sempre positiva (essendo il valore di aspettazione di una matrice definita positiva) ed è perciò una probabilità vera. Essa può essere intesa come la probabilità che il sistema sia nello stato coerente $|\alpha\rangle$. La funzione $Q(\alpha)$ permette di ottenere efficaci rappresentazioni pittoriche [3] degli stati nello spazio delle fasi. In fig.2.1 sono riportate le rappresentazioni Q per uno stato numero e per uno coerente. Si noti che nel piano α la nuvola bigaussiana dello stato coerente è spostata dall'origine che rappresenta il vuoto. In fig.2.2 sono invece riportate le rappresentazioni Q per il vuoto squeezed e per due stati squeezezzati su due quadrature diverse ($\phi = 0$ e $\phi = \pi/2$).

Capitolo 3

Metodi di rivelazione della radiazione elettromagnetica

3.1 Introduzione

In questo capitolo vengono presi in esame alcuni metodi di rilevazione della radiazione. Due di essi hanno in comune l'utilizzo di un beam splitter o "rubinetto ottico". Il beam splitter è il più semplice device che permette di misurare un segnale codificato in ampiezza o in fase. Esso è sostanzialmente uno specchio semitrasparente con due porte in ingresso e due in uscita. In una delle due porte in ingresso entra segnale da misurare l'altra non è utilizzata. La descrizione quantistica mostra come la figura di rumore del rubinetto ottico dipenda in modo determinante dall'osservabile che viene misurata.

Come vedremo per la rivelazione homodyne la degradazione del segnale trasmesso può essere attribuita alle fluttuazioni quantistiche del vuoto presente come ingresso sulla porta libera del beam splitter. Vedremo anche

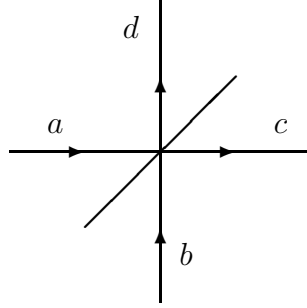


Figura 3.1: Schema del beam splitter

come la figura di rumore può essere migliorata attraverso l'introduzione di luce squeezata nella porta libera del rubinetto ottico fino ad ottenere in condizioni ottimali un segnale trasmesso pressochè identico a quello ricevuto.

3.2 Il beam splitter ed il convertitore di frequenza

Il beam splitter è un dispositivo ottico completamente passivo da qui deriva la possibilità di farne un'analisi monocromatica, cioè con i campi in ingresso ed in uscita aventi tutti la stessa frequenza. Essenzialmente esso è rappresentato da uno specchio semitrasparente (fig.3.1) caratterizzato da una trasmissività η nel quale si hanno due canali di ingresso a e b e due in uscita c e d qui indicati dagli operatori stessi di annichilazione del campo elettrico. Senza perdere di generalità nella trattazione è possibile studiare il beam splitter

nel caso in cui in ingresso vi sia uno stato con n fotoni in a ed il vuoto in b cioè uno stato a due modi del tipo $|n\rangle|0\rangle$. Le equazioni dei campi, nella descrizione di Heisenberg, sono

$$\begin{aligned} c &= \eta^{1/2}a + (1 - \eta)^{1/2}b , \\ d &= -(1 - \eta)^{1/2}a + \eta^{1/2}b , \end{aligned} \quad (3.1)$$

e si riconducono all'evoluzione unitaria

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \hat{U}^\dagger \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \hat{U} ,$$

dove \hat{U} è l'operatore

$$\hat{U} = \exp \left[\arctan \sqrt{\frac{1 - \eta}{\eta}} (a^\dagger b - ab^\dagger) \right] . \quad (3.2)$$

L'evoluzione dello stato in ingresso è quindi

$$\hat{U}|n\rangle|0\rangle = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p}^{1/2} [-(1 - \eta)^{1/2}]^p \eta^{(n-p)/2} |n - p\rangle|p\rangle . \quad (3.3)$$

La (3.3) è stata utilizzando la formula di Becker-Campbell-Hausdorff [4][11][12] per l'algebra dei momenti angolari. Infatti gli operatori $a^\dagger b$ e ab^\dagger nella (3.2) generano l'algebra [4][11][12]

$$\begin{aligned} \hat{J}^+ &= a^\dagger b , \\ \hat{J}^3 &= \frac{1}{2}(a^\dagger a - b^\dagger b) , \\ \hat{J}^- &= ab^\dagger . \end{aligned} \quad (3.4)$$

La formula di Becker-Campbell-Hausdorff per operatori di questo tipo è:

$$\exp \left(\xi \hat{J}^+ - \bar{\xi} \hat{J}^- \right) = e^{\xi \hat{J}^+} e^{\beta \hat{J}^3} e^{-\bar{\xi} \hat{J}^-} \quad (3.5)$$

Dalla (3.3) è possibile ricavare la probabilità P_k di trovare k fotoni nel braccio c avendo in ingresso uno stato di miscela $\hat{\rho}$ composto da n fotoni in a e dal vuoto in b non discriminando tra le possibilità di uscita in d , cioè la probabilità di passare dallo stato di ingresso $\hat{\rho} \otimes |0\rangle\langle 0|$ ad uno stato di uscita $|k\rangle\langle k| \otimes \hat{1}$. Si ha

$$\begin{aligned} P_k &= \text{Tr} \left(\hat{U}(\hat{\rho} \otimes |0\rangle\langle 0|) \hat{U}^\dagger |k\rangle\langle k| \otimes \hat{1} \right) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \rho_{nn} \binom{n}{k} (1-\eta)^{n-k} \eta^k. \end{aligned} \quad (3.6)$$

La trattazione fin qui esposta per il beam splitter pressuppone che nei canali a e b entrino campi alla stessa frequenza, cioè valga che $\omega_a = \omega_b$. Formalmente la trattazione è analoga anche nel caso che i campi in ingresso non abbiano la stessa frequenza: in tal caso si descrive un convertitore di frequenza. Ora però l'Hamiltoniana (3.2) è fuori risonanza e occorre introdurre un ulteriore modo c in ingresso a frequenza $\omega_c = \omega_a - \omega_b$. L'Hamiltoniana resta invariata nella forma se il modo c può essere considerato un c -numero anziché un operatore: questa approssimazione (detta approssimazione parametrica) è corretta se il modo c è "classico", ovvero è in uno stato coerente molto intenso che non si svuota durante il processo di conversione.

3.3 Rivelazione diretta

Il metodo di rivelazione dell'intensità radiazione e.m. che utilizza fotocontatori.

Dalla letteratura è noto che la distribuzione di probabilità del fotocontatore, cioè la probabilità di rilevare m fotoni è [5]:

$$P_m(T) = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} : \frac{[\zeta \hat{I}(T)T]^m}{m!} \exp[-\zeta \hat{I}(T)T] : \right\} \quad (3.7)$$

dove $\hat{I}(T) = \frac{1}{T} \int_0^T 2\epsilon_0 c \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) dt$, \mathbf{r} è la posizione del singolo rivelatore, $:$ denota l'ordinamento normale dei campi e ζ è l'efficienza del rivelatore infatti $p(t) = \zeta \langle \hat{I}(t) \rangle$ rappresenta la probabilità che la radiazione causi l'emissione di un singolo elettrone da parte del rivelatore permettendo un conteggio unitario nell'intervallo di tempo $(t, t + dt)$.

Se si considera una radiazione monocromatica, la probabilità (3.7) diventa

$$P_m(T) = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} : \frac{(\eta a^\dagger a)^m}{m!} \exp(-\eta a^\dagger a) : \right\} \quad (3.8)$$

dove $\eta = \zeta c \hbar \omega T / v$ è detta l'efficienza quantica del rivelatore ed è la probabilità che un singolo fotone venga rivelato nell'intervallo di misura T .

Se si mette in relazione la (3.8) con la probabilità di avere n fotoni nello stato in ingresso $\rho_{nn} = \langle n | \hat{\rho} | n \rangle$ il risultato è

$$P_m(T) = \sum_{n=m}^{\infty} \rho_{nn} \binom{n}{m} \eta^m (1 - \eta)^{n-m}, \quad (3.9)$$

che può essere interpretata come la probabilità che su un totale di n fotoni m vengano effettivamente rivelati ed $n - m$ sfuggano al rivelatore. Confrontando la (3.9) con la (3.6) si vede che un fotocontatore reale si comporta come un Beam Splitter con trasmissività η messo in serie ad un rivelatore ideale con efficienza quantica unitaria.

Esempi di rivelatori diretti reali sono i fotodiodi a cascata APD, caratterizzati da una bassa efficienza quantica ($\zeta \simeq 0.5$) ed i diodi p-i-n con efficienza quantica alta ($\zeta \simeq 1.0$), ma con un segnale di uscita molto più debole ($\simeq 0.001_{APD}$).

3.4 Rivelazione homodyne

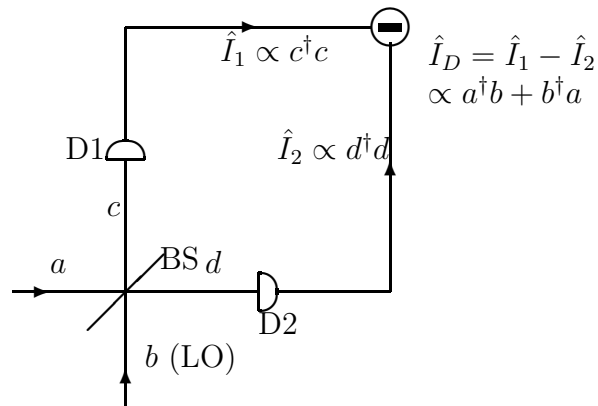


Figura 3.2: Schema bilanciato per la rivelazione homodyne

Lo schema di un rivelatore homodyne bilanciato è rappresentato in fig.(3.2).

Esso utilizza che utilizza un beam splitter (BS) 50/50 che combina il segnale in ingresso a con un segnale b dato da un oscillatore locale (LO) di intensità elevata che produce uno stato coerente della stessa frequenza di a . Sui bracci c e d sono posti due fotodiodi uguali che rilevano le correnti

$\hat{I}_1 \propto c^\dagger c$ e $\hat{I}_2 \propto d^\dagger d$ che vengono sottratte nello stadio finale di rivelazione che produce la corrente differenza $\hat{I}_D = \hat{I}_1 - \hat{I}_2$. Da questo schema deriva la possibilità del rivelatore homodyne di misurare una quadratura ad una determinata fase rispetto all'oscillatore locale. Infatti nei fotodiodi sono rilevati i battimenti dei due segnali di ingresso e più precisamente su uno dei due si ha l'interferenza costruttiva, sull'altro distruttiva, permettendo così di annullare eventuali rumori derivanti dalle fluttuazioni in intensità dell'oscillatore locale. La fotocorrente differenza $\hat{I}_D = c^\dagger c - d^\dagger d$ per mezzo delle relazioni fra i campi (3.1) del beam splitter può essere riscritta come

$$\hat{I}_D = a^\dagger b + b^\dagger a. \quad (3.10)$$

Essendo l'oscillatore locale nello stato coerente $|z_0\rangle$ e il segnale di ingresso nello stato generico $|a\rangle$ il valore medio della corrente differenza \hat{I}_D è

$$\langle \hat{I}_D \rangle = \langle z_{LO} | \langle a | \hat{I}_D | a \rangle | z_{LO} \rangle = z \langle a^\dagger \rangle + z^* \langle a \rangle. \quad (3.11)$$

Introducendo la corrente ridotta

$$\hat{i} = \lim_{|z| \rightarrow \infty} |z|^{-1} \hat{I}_D \quad (3.12)$$

e calcolando il suo valore medio e le fluttuazioni si ottiene

$$\begin{aligned} \langle \hat{i} \rangle &= \frac{1}{2} \langle a^\dagger e^{-i\phi} + a e^{i\phi} \rangle \equiv \langle a_\phi \rangle. \\ \langle \Delta \hat{i}^2 \rangle &= \langle \Delta a_\phi^2 \rangle + \mathcal{O}(|z|^{-2}). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Come si può quindi vedere dalle (3.13) la rivelazione homodyne misura una quadratura del campo elettrico.

3.5 Rivelazione heterodyne

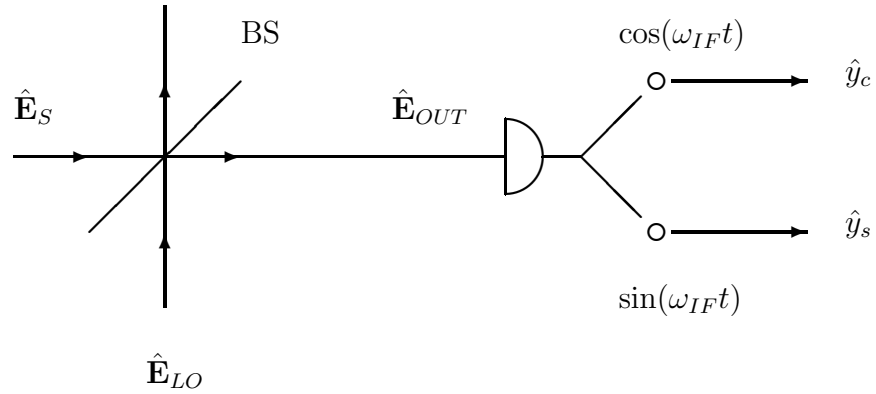


Figura 3.3: Schema del rivelatore heterodyne

Lo schema di un rivelatore di radiazione di tipo heterodyne rappresentato in fig.3.3 prevede l'impiego di un beam splitter, sul quale vengono fatti interferire i campi provenienti dal segnale da rivelare \hat{E}_S e da un oscillatore locale \hat{E}_{LO} . Il campo di uscita \hat{E}_{OUT} arriva quindi sul fotodiodo che lo trasforma in una corrente che viene elettronicamente separata nelle sue parti reale ed immaginaria \hat{y}_C e \hat{y}_S .

Per una descrizione dettagliata del funzionamento occorrerebbe tener conto di tutti i modi del campo; in realtà è possibile, senza mancare di generalità, riferirsi solo ai modi del campo che risultano dare contributo ai valori medi ed agli scarti quadratici medi dei segnali.

Lo schema [3] utilizza oscillatore locale che produce uno stato coerente $|z\rangle$

molto intenso a frequenza ω_0 ; il segnale di ingresso è a frequenza $\omega_0 + \omega_{IF}$ (ω_{IF} =frequenza intermedia), sicchè i campi in ingresso possono essere scritti

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{E}}_S^{(+)}(t) &\propto a_s e^{i(\omega_0 + \omega_{IF})t} + a_i e^{i(\omega_0 - \omega_{IF})t} \\ \hat{\mathbf{E}}_{LO}^{(+)}(t) &\propto b_l e^{i\omega_0 t} + b_i e^{i(\omega_0 - \omega_{IF})t} + b_s e^{i(\omega_0 + \omega_{IF})t}\end{aligned}\quad (3.14)$$

dove l'indice s indica il modo di segnale segnale, l'indice l quello dell'oscillatore locale e i indica il modo della banda immagine.

Nelle (3.14) solo a_s e b_l sono popolati mentre i modi rimanenti (per es. la banda immagine) si trovano in uno stato vuoto.

Di conseguenza per i valori medi dei campi in ingresso si avrà

$$\langle a_i \rangle = \langle b_s \rangle = \langle b_i \rangle = 0. \quad (3.15)$$

Applicando a questo punto le leggi di trasformazione dei campi del beam splitter (3.1) si ottiene il campo di uscita che arriva sul fotodiode

$$\hat{\mathbf{E}}_{OUT}^{(+)} = \eta^{1/2} \hat{\mathbf{E}}_S^{(+)} + (1 - \eta)^{1/2} \hat{\mathbf{E}}_{LO}^{(+)}. \quad (3.16)$$

La fotocorrente alla frequenza ω_{IF} rivelata dal fotodiode viene ottenuta dalla (3.16) con una trasformata di Fourier della funzione

$$\hat{I}_{OUT}(t) = \hat{E}_{OUT}^{(-)} \hat{E}_{OUT}^{(+)} \quad (3.17)$$

ottenendo così la corrente:

$$\hat{I}_{OUT}(\omega_{IF}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{\mathbf{E}}_{OUT}^{(-)}(\omega + \omega_{IF}) \cdot \hat{\mathbf{E}}_{OUT}^{(+)}(\omega). \quad (3.18)$$

Analogamente a quanto visto per la rilevazione homodyne viene introdotta la corrente ridotta

$$\hat{i} = \lim_{\eta \rightarrow 1, |z| \rightarrow \infty, \gamma = \text{const.}} \gamma^{-1} \hat{I}_{OUT}(\omega_{IF}) , \quad (3.19)$$

dove

$$\gamma = \eta^{1/2}(1 - \eta)^{1/2}|z| , \quad (3.20)$$

e dove l'operatore $\lim_{|z| \rightarrow \infty}$ sta ad indicare che lo stato coerente $|z\rangle$ dell'oscillatore locale è molto intenso. L'espressione della corrente ridotta è dunque

$$\hat{i} = |z|^{-1} (a_s^\dagger b_l + a_i b_l^\dagger) + \mathcal{O} \quad (3.21)$$

dove con \mathcal{O} sono indicati i 4 termini derivanti dalla (3.18) che non compaiono in quanto non danno contributo nè al valor medio, nè alle fluttuazioni.

Essendo in generale la corrente ridotta \hat{i} una quantità complessa, è possibile (elettronicamente) ricavarne le sue parti reale ed immaginaria [3]

$$\begin{aligned} \hat{i}_c = \text{Re} \hat{i} &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \hat{i}(t) \cos \omega t = \frac{1}{2} (\hat{i} + \hat{i}^\dagger) . \\ \hat{i}_s = \text{Im} \hat{i} &= - \int_{-\infty}^{\infty} dt \hat{i}(t) \sin \omega t = \frac{1}{2i} (\hat{i} - \hat{i}^\dagger) . \end{aligned} \quad (3.22)$$

Calcolando i valori medi si ottiene

$$\begin{aligned} \langle \hat{i}_c \rangle &= \frac{1}{2} \langle a_s^\dagger e^{-i\phi} + a_s e^{i\phi} \rangle \equiv \langle a_{s\phi} \rangle , \\ \langle \hat{i}_s \rangle &= \frac{1}{2i} \langle a_s^\dagger e^{-i\phi} - a_s e^{i\phi} \rangle \equiv \langle a_{s\phi+\pi/2} \rangle . \end{aligned} \quad (3.23)$$

Come si vede essi coincidono con quelli di due quadrature coniugate del campo.

Gli scarti quadratici medi sono invece

$$\begin{aligned}\langle \Delta \hat{i}_c^2 \rangle &= \langle \Delta a_{s\phi}^2 \rangle + \langle \Delta a_{i\phi}^2 \rangle , \\ \langle \Delta \hat{i}_s^2 \rangle &= \langle \Delta a_{s\phi+\pi/2}^2 \rangle + \langle \Delta a_{i\phi+\pi/2}^2 \rangle ,\end{aligned}\tag{3.24}$$

ovvero il rumore delle due quadrature con in più i termini aggiuntivi $\langle \Delta a_{i\phi}^2 \rangle$ e $\langle \Delta a_{i\phi+\pi/2}^2 \rangle$.

In conclusione la rivelazione heterodyne permette di misurare simultaneamente le due quadrature del campo elettrico, cioè il campo complesso. La misura congiunta delle due osservabili che non commutano comporta però un rumore aggiunto dovuto all'atto di misura. Detto rumore è ineliminabile; esso è al più migliorabile fino al limite di 3db nel caso del vuoto. Si noti che una tale perdita equivale a quella di circa 2 Km di fibra ottica.

3.6 Figure di rumore del beam splitter

[3] Come prima visto, il beam splitter può essere utilizzato sia in rilevazione diretta, sia come elemento ottico nel rivelatore Homodyne comportandosi però in modo differente nei due casi. Infatti avendo in ingresso cioè sul braccio a della fig. 3.1 uno stato numero mettendo un fotocontatore sul braccio c (rivel. diretta) se si calcolano il rapporto segnale-rumore SNR_{n_a} in entrata e SNR_{n_c} in uscita si ottiene :

$$\begin{aligned}\langle \hat{n}_c \rangle &= \eta \langle \hat{n}_a \rangle \\ \langle \Delta \hat{n}_c^2 \rangle &= \eta^2 \langle \Delta \hat{n}_a^2 \rangle + \eta(1 - \eta) \langle \hat{n}_a \rangle\end{aligned}$$

$$NF_{Dir} = \frac{SNR_{n_a}}{SNR_{n_c}} = 1 + \frac{1 - \eta}{\eta F_a} \quad (3.25)$$

La figura di rumore (3.25) si discosta da quella ideale unitaria per un fattore $(1 - \eta) / \eta F_a$ che dipende dal fattore di Fano di ingresso e dalla trasmissività costante dello specchio. Per stati coerenti $F = 1$ e immaginando di utilizzare uno specchio con trasmissività η del 50% la figura di rumore viene ad essere uguale a 2 corrispondente a 3db. Il rumore derivante da questo schema può essere fisicamente imputato al comportamento corpuscolare della luce.

Nel caso di rivelazione Homodyne la figura di rumore è

$$\begin{aligned} \langle c_\phi \rangle^2 &= \eta \langle a_\phi \rangle^2, \\ \langle \Delta c_\phi^2 \rangle &= \eta \langle \Delta a_\phi^2 \rangle + (1 - \eta) \langle \Delta b_\phi^2 \rangle, \end{aligned}$$

$$NF_{Hom} = \frac{SNR_{a_\phi}}{SNR_{c_\phi}} = 1 + \frac{1 - \eta}{\eta} \frac{\langle \Delta b_\phi^2 \rangle}{\langle \Delta a_\phi^2 \rangle}.$$

Si noti la dipendenza dalle fluttuazioni delle quadrature nei due ingressi a e b . Questo permette di regolare la figura di rumore utilizzando per a e b stati squeezed ; infatti mettendo in b il vuoto squeezed oppure aumentando il fattore di squeezing sulla quadratura a_ϕ è possibile diminuire la figura di rumore. Il rumore che interviene nello schema Homodyne è interpretabile come dovuto al comportamento ondulatorio della luce che crea interferenza tra i segnali in a ed in b .

Capitolo 4

Amplificatori di campo

4.1 Introduzione

In questo capitolo vengono affrontati i problemi quantistici riguardanti l'amplificazione del campo per mezzo di dispositivi ottici attivi lineari e non.

Classicamente un amplificatore lineare ideale è uno strumento che opera una trasformazione sul campo in ingresso \hat{a} trasformandolo nel campo \hat{A} di uscita secondo la relazione tra i valori medi

$$\langle A \rangle = G^{1/2} \langle a \rangle , \quad (4.1)$$

dove $G > 1$ è detto guadagno dell'amplificatore. In linea di principio la relazione (4.1) è indipendente (G a parte) da qualsiasi parametro dell'amplificatore e non prevede rumore. Tuttavia, come abbiamo visto in precedenza (par. 3.5 ed altri), la teoria quantistica prevede un rumore aggiunto.

4.2 Amplificazione laser in fibre ottiche attive

In generale, quando un segnale si propaga in una fibra ottica, esso si attenua man mano che percorre la fibra. Le perdite sono da attribuire alla natura dei materiali di cui è costituita la fibra, di solito silice o base vetrosa.

Allo scopo di eliminare l'attenuazione del segnale si è pensato di introdurre nelle fibre piccole quantità di materiale drogante. I migliori risultati in questo senso sono stati ottenuti utilizzando come drogante l'Erbio o ioni di terre rare in quantità dell'ordine delle cento parti per milione. In questo modo si è riscontrato che la fibra produce una sorta di amplificazione continua sostenendo il segnale che si propaga in essa.

Una fibra ottica drogata può essere schematizzata come un sistema a due livelli come quello schematizzato in fig.(4.1) dove con e è indicato il livello eccitato del sistema e con g quello fondamentale. Indicando ora con $N_{e,g}$ le

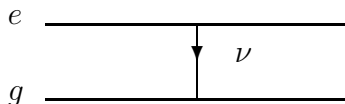


Figura 4.1: Schema a due livelli per fibra ottica drogata

popolazioni del livello eccitato e di quello fondamentale, con $\sigma_{e,a}$ le sezioni d'urto di emissione e di assorbimento e con $P_n(z)$ la probabilità di trovare n

fotoni a frequenza ν alla sezione z della fibra è possibile ottenere l'equazione di evoluzione per l'andamento di $P_n(z)$ lungo la fibra [6]

$$\begin{aligned}\partial_z P_n(z) &= \sigma_a N_g (n+1) P_{n+1}(z) + \sigma_e N_e n P_{n-1}(z) \\ &\quad - \sigma_a N_g n P_n(z) - \sigma_e N_e (n+1) P_n(z).\end{aligned}\quad (4.2)$$

moltiplicando per n e n^2 e sommando su n il numero medio e sullo scarto quadratico medio del numero di fotoni

$$\begin{aligned}\langle n \rangle &= G n_0 + (G-1)P, \\ \langle \Delta n^2 \rangle &= \underbrace{G n_0}_{(1)} + \underbrace{(G-1)P}_{(2)} + \underbrace{2G(G-1)P n_0}_{(3)} + \\ &\quad \underbrace{(G-1)^2 P^2}_{(4)} + \underbrace{G^2 (F_0 - 1) n_0}_{(5)},\end{aligned}\quad (4.3)$$

dove

- $G = \exp [L (\sigma_e N_e - \sigma_a N_g)]$: guadagno della fibra;
- L : lunghezza della parte attiva della fibra;
- n_0 : numero di fotoni in ingresso;
- $P = \sigma_e N_e / (\sigma_e N_e - \sigma_a N_g)$: coefficiente di emissione spontanea;
- $F_0 = \langle \Delta n^2 \rangle_0 / n_0$: fattore di Fano del segnale di ingresso.

Nella (4.3) sono presenti cinque contributi al rumore che sono interpretabili nel seguente modo:

- (1) fluttuazioni quantistiche del segnale amplificato;
- (2) emissione spontanea amplificata (ASE);
- (3) battimento tra il segnale amplificato e (ASE);
- (4) autobattimento di ASE;
- (5) rumore aggiunto.

Le migliori condizioni operative si hanno in condizioni di alto guadagno ($G \gg 1$), in corrispondenza di inversione totale di popolazione e per segnale intenso in ingresso ($n_0 \gg 1$). In tal caso si ottiene la figura di rumore

$$R \simeq 1 + \frac{G - 1}{GF_0}, \quad (4.4)$$

che per una radiazione di tipo Poissoniano in ingresso, come nel caso di uno stato coerente, prende il valore $R \simeq 3dB$ dovuto al solo termine (3) di rumore consentito dall'emissione spontanea.

4.3 Amplificatore Phase Insensitive (PIA)

Nel caso di un amplificatore lineare classico, fra il campo in ingresso a ed il campo in uscita A sussiste la relazione fra i valori medi

$$\langle A \rangle = G^{1/2} \langle a \rangle , \quad (4.5)$$

dove $G > 1$ è il guadagno dell'amplificatore. La (4.5) non può essere quantizzata semplicemente con la relazione

$$A = G^{1/2} a , \quad (4.6)$$

in quanto in questa forma non rispetta la natura bosonica dei campi, come è evidente dalle regole di commutazione

$$[A, A^\dagger] = [G^{1/2} a, G^{1/2} a^\dagger] = G \neq 1 . \quad (4.7)$$

Analogamente al caso del beam splitter (par 3.1) si rende quindi necessario introdurre un ulteriore modo b tale che $[b, b^\dagger] = 1$ e $[a, b] = [a, b^\dagger] = 0$, in modo che le trasformazioni[2]

$$A = ma + nb , \quad (4.8)$$

$$A = \mu a + \nu b^\dagger , \quad (4.9)$$

conservino la relazione di commutazione $[A, A^\dagger] = 1$. Questo si verifica se sono soddisfatte le condizioni tra i coefficienti

$$|m|^2 + |n|^2 = 1 , \quad (4.10)$$

$$|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1 . \quad (4.11)$$

Le trasformazioni (4.8) e (4.9) corrispondono, nell'ordine, ai casi di perdita lineare e di amplificazione lineare ed è quindi possibile riscriverle nei termini del guadagno G e del coefficiente di perdita η come segue

$$A = \eta^{1/2}a + (1 - \eta)^{1/2}b, \quad (\text{perdite}) \quad (4.12)$$

$$A = G^{1/2}a + (G - 1)^{1/2}b^\dagger, \quad (\text{amplificazione}) \quad (4.13)$$

nelle quali $G \equiv |\mu|^2 > 1$ e $\eta \equiv |m|^2 < 1$.

La denominazione “phase insensitive” deriva dal fatto che, essendo G ed η numeri reali indipendenti dalla fase del campo in ingresso, anche l'amplificazione che si ottiene ne è indipendente. Le trasformazioni analoghe alle (4.12) e (4.13) che danno il campo in uscita B sono

$$B = -(1 - \eta)^{1/2}a + \eta^{1/2}b, \quad (4.14)$$

$$B = (G - 1)^{1/2}a^\dagger + G^{1/2}b. \quad (4.15)$$

Queste, insieme alle (4.12) e (4.13), possono essere riassunte dalla trasformazione unitaria

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \hat{U}^\dagger \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \hat{U},$$

dove l'operatore \hat{U} , nel caso dell'amplificazione è

$$\hat{U} = \exp \left[\operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{G-1}{G}} (a^\dagger b^\dagger - ab) \right], \quad (4.16)$$

mentre nel caso di perdita diventa

$$\hat{U} = \exp \left[\operatorname{arctan} \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta}} (a^\dagger b - ab^\dagger) \right]. \quad (4.17)$$

Corrispondentemente al modo di ingresso b occorre introdurre il modo di uscita B tale che $[A, B] = [A, B^\dagger] = 0$. In questo modo l'amplificatore risulta schematizzato come un sistema a quattro porte (vedi fig.(4.2)), contrariamente allo schema classico a due porte di figura (4.3).

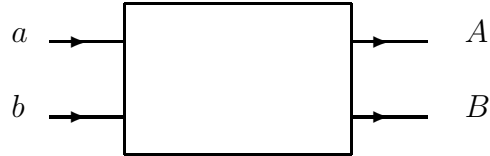


Figura 4.2: Schema di un Amplificatore Phase Insensitive.



Figura 4.3: Schema di amplificatore classico

In questo capitolo ci limiteremo a considerare il caso dell'amplificatore: la trattazione dell'attenuatore sarà affrontata in dettaglio nel capitolo 5. L'ingresso b , anche se in esso non viene immessa radiazione, è il responsabile del rumore aggiunto dell'amplificatore. Sono infatti le fluttuazioni di vuoto del modo b , detto modo "idler", che conducono a figure di rumore non ideali.

In generale, l'amplificatore phase insensitive reagisce in maniera differente a

seconda del metodo di rilevazione usato all'uscita.

I casi di maggior interesse sono: la rilevazione homodyne (misurazione di una quadratura del campo in uscita) e la rivelazione diretta (misura del numero di fotoni in uscita).

Calcolando le fluttuazioni in quadratura di A_ϕ , mantenendo b nello stato di vuoto($\langle b_\phi \rangle = 0$) e ricordando che le fluttuazioni di vuoto sono $\langle \Delta b_\phi^2 \rangle = 1/4$ si ottiene:

$$\langle \Delta A_\phi^2 \rangle = G \langle \Delta a_\phi^2 \rangle + (G - 1)/4. \quad (4.18)$$

Le fluttuazioni nel numero di fotoni (sempre mantenendo $\langle \hat{n}_b \rangle = 0$) sono invece

$$\langle \Delta \hat{n}_A^2 \rangle = G^2 \langle \Delta \hat{n}_a^2 \rangle + (G - 1)^2 \langle \hat{n}_a \rangle + (G - 1)^2. \quad (4.19)$$

Di conseguenza le figure di rumore nei due casi sono[2]

$$\frac{SNR_{a_\phi}}{SNR_{A_\phi}} = 1 + \frac{G - 1}{GS_{a_\phi}}, \quad (4.20)$$

$$\frac{SNR_{n_a}}{SNR_{n_A}} \simeq 1 + \frac{G - 1}{GF_a}, \quad (4.21)$$

dove S_{a_ϕ} e F_a sono rispettivamente il fattore di squeezing ed il fattore di Fano del campo in ingresso .

Dalle (4.21) si può notare come nel caso di rilevazione homodyne la figura di rumore si avvicina a quella ideale unitaria se il fattore di squeezing di ingresso S_{a_ϕ} è grande, ovvero per a fortemente antisquezzato.

Nello schema a rilevazione diretta invece è possibile migliorare la figura di rumore utilizzando in ingresso stati altamente superpoissoniani ($F_a \gg 1$).

L'Hamiltoniana effettiva dell'amplificatore phase insensitive nello schema di Dirac è data dall'argomento dell'esponenziale (4.16)

$$\hat{H}_I^D = ik (a^\dagger b^\dagger - ab) , \quad (4.22)$$

dove la costante di accoppiamento k è legata al guadagno G ed al tempo di interazione τ dalla relazione

$$k\tau = \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{G-1}{G}} \simeq \frac{1}{2} \ln G. \quad (4.23)$$

Nello schema di Schrödinger l'Hamiltoniana di interazione (4.22) assume la dipendenza temporale

$$\hat{H}_I^D = k (a^\dagger b^\dagger e^{-i(\omega t + \phi)} + ab e^{i(\omega t + \phi)}) , \quad (4.24)$$

dove $\omega = \omega_a + \omega_b$.

Il termine oscillante $e^{i(\omega t + \phi)}$ può essere considerato mediante l'introduzione di un terzo modo in ingresso c che viene considerato come un c -numero: ciò corrisponde ad uno stato essenzialmente classico, ovvero uno coerente molto intenso (approssimazione parametrica) del tipo

$$c \rightarrow \sqrt{I_c} e^{-i(\omega t + \phi)}. \quad (4.25)$$

Il campo c è il modo di pompa dell'amplificatore, ovvero il modo del campo responsabile della conversione dell'energia.

Tenendo conto anche del modo di pompa l'Hamiltoniana diventa[2]

$$\hat{H}_I = \chi^2 (a^\dagger b^\dagger c + c^\dagger ba) , \quad \omega_c = \omega_a + \omega_b , k = \sqrt{I_c} \chi^2 , \quad (4.26)$$

ovvero l'Hamiltoniana di un miscelatore a tre onde schematizzabile come in fig.(4.4) È possibile inoltre scrivere l'Hamiltoniana come quella di un miscela-

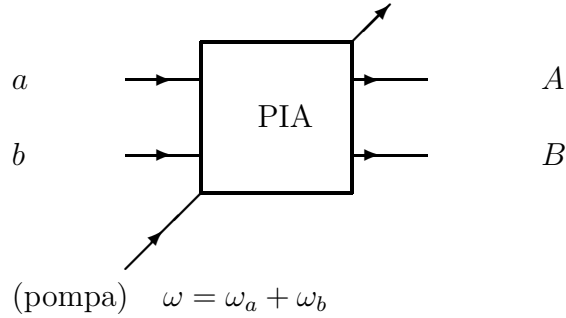


Figura 4.4: Schema di un amplificatore phase insensitive ideale.

tore degenerare a quattro onde[2] con frequenza di pompa $2\omega_c = \omega_a + \omega_b$

$$\hat{H}_I = \chi^{(3)} (a^\dagger b^\dagger c^2 + (c^\dagger)^2 ba) , \quad 2\omega_c = \omega_a + \omega_b . \quad (4.27)$$

Nella 4.26 e nella 4.27 i coefficienti $\chi^{(2)}$ e $\chi^{(3)}$ indicano le suscettività di secondo e terzo ordine dello sviluppo

$$P = \chi E + \chi^{(2)} E^2 + \chi^{(3)} E^3 .$$

Alte suscettività di ordine due possono essere ottenute in materiali quali il Fosfato di Potassio e Titanile ($KTiOPO_4$), mentre le quantum wells dell'Arseniuro di Gallio portano a suscettività $\chi^{(2)} \sim 3000 \chi_{(KTiOPO_4)}^{(2)}$.

Per amplificatori costruiti con questi materiali la lunghezza di interazione del campo con il mezzo attivo è circa 1nm e la potenza adatta per il pompaggio circa 1mW.

4.4 Amplificatore phase sensitive

[2] Un amplificatore phase sensitive è un dispositivo che reagisce in modo diverso a seconda della fase del campo da amplificare. Denotando con a_ϕ e $a_{\phi+\pi/2}$ due quadrature ¹ coniugate del campo in ingresso, l'amplificatore opera la trasformazione

$$A_\phi = G^{1/2}a_\phi, \quad A_{\phi+\pi/2} = G^{-1/2}a_{\phi+\pi/2}, \quad (4.28)$$

il guadagno G è quindi sensibile alla fase ϕ della quadratura.

Anche in questo caso, analogamente a quanto accade per l'amplificatore phase insensitive, le relazioni (4.28) non conservano la commutazione tra i campi, ma questa viene rispettata dalla trasformazione

$$A = \mu a + \nu a^\dagger, \quad (4.29)$$

dove

$$\mu = \frac{1}{2} (G^{1/2} + G^{-1/2}), \quad \nu = \frac{e^{2i\phi}}{2} (G^{1/2} - G^{-1/2}). \quad (4.30)$$

¹La quadratura con fase ϕ è

$$a_\phi = \frac{1}{2} (ae^{i\phi} + a^\dagger e^{-i\phi})$$

È evidente dalla (4.29) che, diversamente da quanto visto per il phase insensitive, la trasformazione unitaria $A = U^\dagger a U$ può essere ottenuta senza ricorrere all'aggiunta di un modo idler utilizzando l'operatore

$$\hat{U} = \exp \left\{ -\frac{1}{4} \ln G \left[(a^\dagger)^2 e^{-i\phi} - a^2 e^{i\phi} \right] \right\} . \quad (4.31)$$

La (4.29) ha la stessa forma della trasformazione di squeezing

$$\hat{S}^\dagger(\zeta) a \hat{S}(\zeta) = \mu a + \nu a^\dagger .$$

Nel caso in cui l'ingresso a sia in uno stato coerente $|\alpha\rangle$, la (4.29) lo trasforma nel seguente modo

$$|\alpha\rangle \longrightarrow |\alpha', \zeta\rangle , \quad \alpha' = \alpha\mu + \bar{\alpha}\nu , \quad \zeta = e^{i \arg(\nu)} \operatorname{atanh} \left| \frac{\nu}{\mu} \right| . \quad (4.32)$$

In particolare, utilizzando come ingresso il vuoto si può ottenere come stato di uscita il vuoto squeezed.

Il comportamento sopra descritto dell'amplificatore phase sensitive lo rende particolarmente come preamplificatore in rivelazione homodyne. La figura di rumore è infatti ideale per rivelazione homodyne, viene cioè conservato il rapporto segnale/rumore in ingresso ed in uscita

$$SNR_{A_\phi} = SNR_{a_\phi} .$$

L'Hamiltoniana dell'amplificatore nello schema di Schrödinger può essere scritta come quella di un miscelatore a tre onde degeneri

$$\hat{H}_I = \chi^{(2)} \left((a^\dagger)^2 e^{-i(\omega t + \phi)} + a^2 e^{i(\omega t + \phi)} \right) , \quad (4.33)$$

con una pompa classica a frequenza $\omega = 2\omega_a$. La relazione che lega la suscettività $\chi^{(2)}$, il tempo di interazione τ ed il guadagno G è

$$k\tau = \frac{1}{4} \ln G . \quad (4.34)$$

Pertanto, per realizzare un buon amplificatore phase sensitive occorre semplicemente disporre di un materiale ad alta suscettività $\chi^{(2)}$ operando ad una frequenza di pompa doppia di quella del segnale. È possibile diversamente usare anche materiali con suscettività $\chi^{(3)}$ a patto allora di avere anche la pompa degenerare.

Capitolo 5

Utilizzo del beam splitter in una rete di comunicazione

5.1 Introduzione

Nelle reti di comunicazione i segnali trasmessi ed opportunamente codificati da varie sorgenti devono in generale essere condivisi da più utenti. Ad ogni derivazione di utente l'informazione deve essere rilevata senza produrre disturbo sul segnale lasciato a disposizione degli utenti successivi lungo la rete.

Nei capitoli precedenti è stato descritto come il beam splitter rappresenti il più semplice dispositivo che permette la condivisione di un segnale. Tuttavia si è anche visto come questo procedimento provochi una degradazione del segnale che aumenta con il numero degli utenti e rende quindi inutilizzabile il segnale stesso.

In questo capitolo si illustra un metodo per migliorare le prestazioni del beam splitter usato come rubinetto ottico utilizzando opportuni preamplifi-

catori.

Le figure di rumore del beam splitter saranno confrontate con quelle di un beam splitter preamplificato.

5.2 Il rubinetto ottico

La derivazione di una rete di comunicazione che permette l'utilizzo di un segnale da parte di un utente è schematizzata in fig. (5.1)

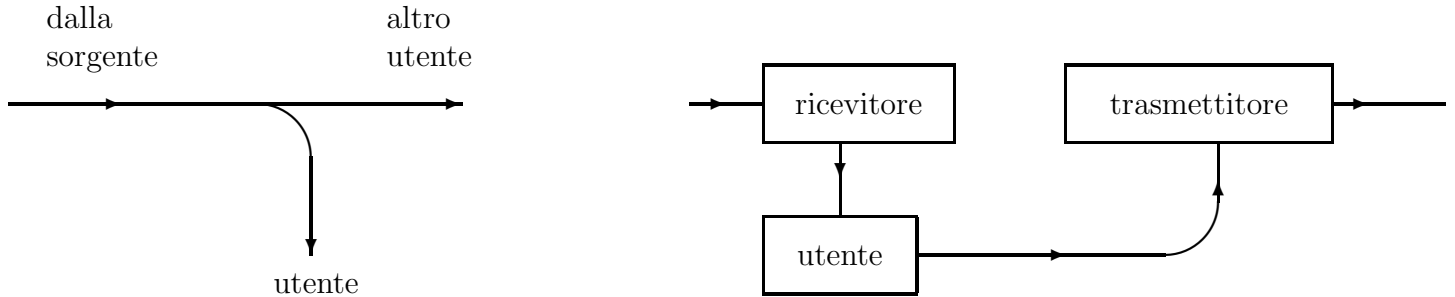


Figura 5.1: Derivazioni di rete per un utente.

Il più semplice dispositivo ottico che realizza tale scopo è il beam splitter di fig. (5.2), in cui i canali di ingresso sono a e d e quelli di uscita b e c e la porta d non è utilizzata.

Dalla descrizione fatta per il beam splitter (par. 3.1-3.5) si è visto come esso induca una degradazione del segnale di ingresso a in misura proporzionale alla trasmittività η ed alle caratteristiche del segnale stesso.

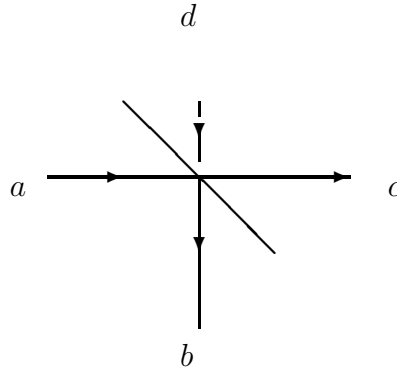


Figura 5.2: Rubinetto ottico

		Direct	Homodyne
b	T_{ab}	$1 - \eta$	$1 - \eta$
	D_{ab}	$\frac{\eta}{(1-\eta)F_a}$	$\frac{\eta}{(1-\eta)S_a}$
c	T_{ac}	η	η
	D_{ac}	$\frac{1-\eta}{\eta F_a}$	$\frac{1-\eta}{\eta S_a}$

Tavola 5.1: Figure di rumore del beam splitter

Nel caso di una successione di derivazioni lungo la rete tale degradazione cresce in modo esponenziale con il numero degli utenti che lo misurano. Nella tabella (5.1) sono riassunti i risultati dall'analisi del beam splitter nei casi in cui i segnali di uscita c e b vengono rilevati con metodo diretto o con metodo homodyne.

Per semplificare la notazione, nella tabella si è tenuto conto che la figura di

rumore si discosta da quella unitaria per una quantità D_{ao}

$$\frac{SNR_{\hat{O}_a}}{SNR_{\hat{O}_o}} = 1 + D_{ao}, \quad o = a, b, \quad \hat{O} = a^\dagger a, a_\phi,$$

mentre il valore medio delle quantità misurate in uscita subisce una riduzione rispetto a quelle in ingresso per un fattore $\sqrt{T_{ao}}$

$$\langle \hat{O}_o \rangle^2 = \langle \hat{O}_a \rangle^2 T_{ao}.$$

5.3 Il rubinetto ottico preamplificato

Al fine di migliorare la figura di rumore di un beam splitter è utile far passare il segnale in un amplificatore prima che entri nel rubinetto ottico secondo lo schema di fig.(5.3).

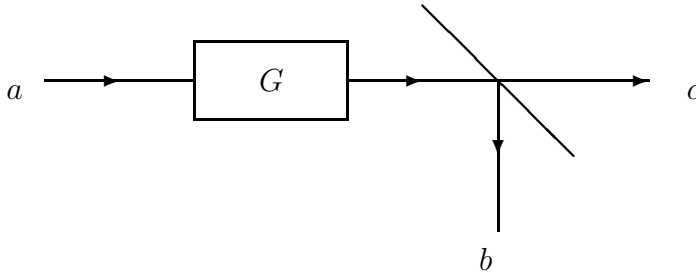


Figura 5.3: Schema di preamplificazione.

Se il segnale di uscita viene rivelato secondo uno schema homodyne, il preamplificatore a guadagno G può essere di tipo phase sensitive o di tipo phase

		Diretta		Homodyne	
		PIA		PSA	PIA
b	T_{ab}	$G(1-\eta)$	$G(1-\eta)$	$G(1-\eta)$	$G(1-\eta)$
	D_{ab}	$+\frac{G-1}{GF_a}$	$\frac{\eta}{G(1-\eta)S_a}$	$+\frac{G-1}{GS_a}$	
c	T_{ac}	$G\eta$	$G\eta$	$G\eta$	$G\eta$
	D_{ac}	$+\frac{G-1}{GF_a}$	$\frac{1-\eta}{G\eta S_a}$	$+\frac{G-1}{GS_a}$	

Tavola 5.2: Figure di rumore per il beam splitter preamplificato

insensitive , producendo figure di rumore diverse nei due casi. Nei capitoli successivi saranno descritti invece gli amplificatori di numero che possono essere utilizzati come preamplificatori nel caso in cui si desideri rilevare il numero di fotoni in uscita (rivlevazione diretta). I risultati sono riassunti nella tabella (5.2), dove la notazione è come in tabella (5.1).

Da questi valori si intende che utilizzando un amplificatore con guadagno elevato ($G \gg 1$) si riesce a raggiungere la condizione

$$SNR_a \simeq SNR_b \simeq SNR_c ,$$

che, nel caso in cui si abbia uno stato coerente sul braccio a del sistema, significa una figura di rumore inferiore ai 3db.

È quindi possibile, in linea di principio, rialimentare il segnale in ogni stadio di misurazione della rete in modo da contenere l'aumento del rumore alle derivazioni.

Capitolo 6

Amplificatori di numero

6.1 Introduzione

Nei capitoli precedenti è stato descritto come sia possibile utilizzare un beam splitter con lo scopo di permettere ad un utente di utilizzare un segnale viaggiante in una rete ottica. Grazie a questo dispositivo, accoppiato ad un amplificatore, il segnale viene diviso in due parti dopo essere stato "rigenerato" dall'amplificatore in modo che una parte del segnale prosegua pressochè inalterata lungo la rete mentre l'altra arriva all'utente che ne misura una quadratura secondo uno schema di rivelazione homodyne.

Tuttavia, esistono altre possibilità: è possibile riprodurre una esatta copia del segnale duplicando il numero dei fotoni che compongono il segnale stesso, oppure amplificare il numero di fotoni in ingresso raddoppiandolo. I dispositivi che realizzano questo comportamento prendono il nome di *duplicatore di numero di fotoni* (PNA) e *amplificatore di numero di fotoni* (PND); essi sono entrambi utilizzabili in schemi di rivelazione diretta, cioè nella configurazione

in cui l'utente misura l'intensità del campo anziché una quadratura come nel caso di rivelazione homodyne.

Il PNA è un dispositivo con più porte di ingresso e di uscita. Nel caso in cui su una porta di ingresso il campo si presenta in un autostato dell'operatore numero di fotoni $|n\rangle$ il PNA idealmente opera la trasformazione

$$|n\rangle \longrightarrow |Gn\rangle ,$$

dove G è il guadagno dell'amplificatore ed è necessariamente un numero intero.

Il PND, invece, è un dispositivo che produce *due copie dello stato di ingresso* $|n\rangle$ secondo la trasformazione

$$|n\rangle \longrightarrow |n, n\rangle ,$$

dove con $|n, n\rangle$ è indicato lo stato a due modi a e b con n fotoni nel modo a ed n nel modo b .

Nell'utilizzo in rete locale (LAN), il PNA è indicato come preamplificatore ideale per una derivazione di rete mentre il PND rappresenta esso stesso un rubinetto ottico ideale senza perdite, realizzando una misura quantistica non demolitiva del numero di fotoni.

6.2 L'amplificatore ideale di numero

Nel caso ideale, l'amplificazione di numero di fotoni è attuata dalla trasformazione:

$$a^\dagger a \rightarrow G a^\dagger a , \quad (6.1)$$

dove $a^\dagger a$ è l'operatore numero del modo a e, a causa della natura intera degli autovalori di $a^\dagger a$ il guadagno G deve essere un numero intero.

Questa condizione non è ripetuta nel caso di deamplificazione, infatti se G è un numero intero G^{-1} non lo è, quindi la relazione

$$a^\dagger a \rightarrow G^{-1} a^\dagger a \quad (6.2)$$

non è valida in quanto non produce autovalori interi del numero.

Una deamplificazione può essere ottenuta invece dalla trasformazione

$$a^\dagger a \rightarrow [G^{-1} a^\dagger a] , \quad (6.3)$$

dove con il simbolo $[x]$ è indicata la parte intera di x . Di conseguenza, nel caso di deamplificazione. Il guadagno effettivo G_* è dipendente dal numero di fotoni in ingresso e anche idealmente deve necessariamente essere diverso da G^{-1} secondo la relazione

$$G_* = \frac{[G^{-1}n]}{n} \leq G^{-1} , \quad (6.4)$$

dove con n indicata il numero di fotoni in ingresso.

Per ottenere un risultato come quello della (6.1) l'amplificatore deve essere in grado di attuare la conversione tra due modi del campo

$$|n, 0\rangle \rightarrow |0, Gn\rangle . \quad (6.5)$$

Si rende quindi necessario descrivere il progressivo “svuotamento” del primo modo ed il contemporaneo “riempimento” del secondo con un numero di fotoni amplificato.

La trasformazione (6.3) è ottenibile mediante il passaggio ad un nuovo operatore di creazione $a_{(G)}^\dagger$

$$a^\dagger \rightarrow a_{(G)}^\dagger . \quad (6.6)$$

tra i modi.

$a_{(G)}^\dagger$ deve essere un operatore bosonico che crea G fotoni per volta, ovvero deve rispettare le condizioni

$$[a_{(G)}, a_{(G)}^\dagger] = 1 , \quad [a_{(G)}, a^\dagger a] = Ga_{(G)} . \quad (6.7)$$

La forma esplicita di tale operatore è[7]

$$a_{(G)}^\dagger = \left\{ \frac{[G^{-1}\hat{n}](\hat{n} - G)!}{\hat{n}!} \right\}^{1/2} (a^\dagger)^G . \quad (6.8)$$

L'applicazione allo stato con n fotoni $|n\rangle$ genera l'autostato con $G + n$ fotoni

$$a_{(G)}^\dagger |n\rangle = \sqrt{[G^{-1}n] + 1} |n + G\rangle . \quad (6.9)$$

L'operatore numero costruito con $a_{(G)}^\dagger$ è

$$a_{(G)}^\dagger a_{(G)} = [G^{-1}a^\dagger a] , \quad (6.10)$$

ed ha quindi la forma della trasformazione di deamplificazione (6.3).

L'amplificazione è invece ottenibile dalla trasformazione inversa della (6.6), ovvero dalla

$$a_{(G)}^\dagger \rightarrow a^\dagger . \quad (6.11)$$

Le trasformazioni (6.6) e (6.11) sono permutazioni tra due diversi bosoni; di conseguenza è possibile calcolare l'operatore di evoluzione che, nello schema di Heisenberg, realizza le permutazioni.

Nel caso di permutazione fra modi tra loro commutanti, come per esempio a e c con $[a, c] = [a, c^\dagger] = 0$ la trasformazione $a \rightarrow c$ è attuata dall'operatore[8]

$$P = P^\dagger = \exp\left(i\frac{\pi}{2}c^\dagger c\right) \exp\left[-i\frac{\pi}{2}(a^\dagger c + c^\dagger a)\right] \exp\left(i\frac{\pi}{2}c^\dagger c\right) , \quad (6.12)$$

nel modo seguente

$$PaP = c , \quad PcP = a \quad (6.13)$$

Nel nostro caso occorre necessariamente considerare anche un cambiamento di modi (l' amplificatore converte anche la frequenza oltre che il numero), in quanto gli operatori $a_{(G)}$ e a non commutano. L'operatore di conversione $P_{(G)}$ viene scritto nella forma[8]

$$P_{(G)} = \exp\left(i\frac{\pi}{2}c^\dagger c\right) \exp\left[-i\frac{\pi}{2}(a_{(G)}^\dagger c + c^\dagger a_{(G)})\right] \exp\left(i\frac{\pi}{2}c^\dagger c\right) . \quad (6.14)$$

Per verificare come l'operatore $P_{(G)}$ agisce sugli stati di partenza $|0, n\rangle$ e $|n, 0\rangle$ è sufficiente valutare l'evoluzione di Schrödinger

$$P_{(G)}|0, n\rangle = |Gn, 0\rangle , \quad (6.15)$$

$$P_{(G)}|n, 0\rangle = |G \langle G^{-1}n \rangle, [G^{-1}n] \rangle, \quad (6.16)$$

dove con $[x]$ è indicata la parte intera di x e con $\langle x \rangle = x - [x]$ la parte frazionaria di x . La (6.15) si riferisce al caso di amplificazione: infatti durante l'evoluzione dello stato a due modi $|0, n\rangle$ si attua un progressivo svuotamento del secondo modo ed un corrispondente riempimento del primo. La (6.16) rappresenta invece l'evoluzione in caso di deamplificazione: in questo caso è da notare come i processi di riempimento e di svuotamento dei due modi non portano sempre ad una completa conversione dello stato portando così ad un guadagno effettivo diverso da quello ideale (vedi Eq.(6.4)).

Per meglio capire i principi di funzionamento del PNA possono essere d'aiuto alcune osservazioni riguardanti la sua Hamiltoniana.

Nello schema di Dirac, l'Hamiltoniana di interazione del PNA[14] è derivabile dall'operatore di evoluzione (6.14), da cui si ottiene

$$\hat{H}_I = a_{(G)}^\dagger c + \text{h.c.}, \quad (6.17)$$

al tempo adimensionale di conversione

$$\tau_* = \frac{\pi}{2}. \quad (6.18)$$

L'Hamiltoniana (6.17) ha come costanti del moto

$$\hat{s}_A = a^\dagger a + Gc^\dagger c, \quad (6.19)$$

$$\hat{d}_A = G \langle G^{-1} a^\dagger a \rangle = G \langle G^{-1} \hat{s}_A \rangle, \quad (6.20)$$

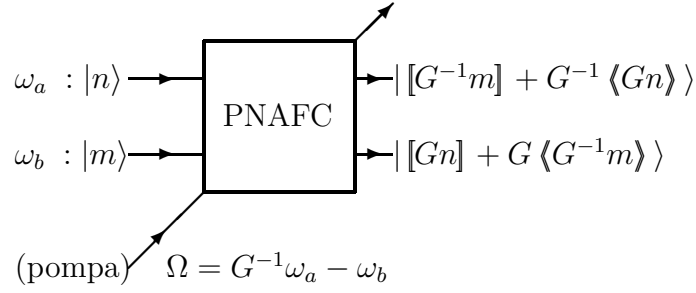


Figura 6.1: Schema di un PNA ideale.

di cui la prima rappresenta il numero totale dei fotoni, ovvero la somma di quelli del modo a e di quelli del modo c .

Grazie a queste relazioni è possibile rappresentare gli stati numero del campo in un altro spazio di Hilbert, utilizzando come base per questo i vettori

$$|n\rangle_{s_A} = |s_A - Gn, n\rangle, \quad n = 0, 1, \dots [G^{-1}s_A], \quad (6.21)$$

dove vengono fissati gli autovalori di \hat{s}_A , cioè il numero totale di fotoni. In questa base le equazioni (6.15) e (6.16) per l'evoluzione degli stati di ingresso si riscrivono

$$P_{(G)}|n\rangle_{Gn} = |0\rangle_{Gn}, \quad (6.22)$$

$$P_{(G)}|0\rangle_n = |[G^{-1}n]\rangle_n, \quad (6.23)$$

mentre, facendo agire l'Hamiltoniana (6.17) sugli stati (6.21) si ottiene

$$\hat{H}_I|n\rangle_s = \alpha_n^{(s)}|n-1\rangle_s + \alpha_{n+1}^{(s)}|n+1\rangle_s, \quad (6.24)$$

dove

$$\alpha_n^{(s)} = \sqrt{n([G^{-1}s] - n + 1)}. \quad (6.25)$$

È quindi possibile calcolare gli elementi di matrice dell'Hamiltoniana (6.17) che viene a presentarsi come una matrice tridiagonale simmetrica, ovvero con tutti gli elementi nulli tranne quelli situati sulla prima sopradiagonale e sulla prima sottodiagonale che risultano uguali agli $\alpha_n^{(s)}$.

La forma dell'Hamiltoniana (6.17) è valida solo in condizioni di risonanza, cioè quando $G\omega_a = \omega_c$, mentre fuori risonanza, per ottenere la conservazione dell'energia e la conversione di frequenza tra i modi è necessario introdurre un ulteriore modo d di pompa in uno stato coerente a frequenza $\omega_d = G\omega_a - \omega_c$. In questo modo l'Hamiltoniana assume la forma[14]

$$\hat{H}' = a_{(G)}^\dagger cd + \text{h.c.} \quad (6.26)$$

che è realizzabile con il dispositivo rappresentato in figura (6.1).

6.3 Il duplicatore di numero di fotoni (PND)

Fenomenologicamente il PND è simile ad un amplificatore con guadagno $G = 2$, ma, a differenza di questo, esso produce due copie dello stato di ingresso anzichè amplificarlo.

Il PND è un device a tre modi di cui uno di ingresso c e due di uscita a e b . Se nel modo di ingresso c sono presenti n fotoni, se ne trovano altrettanti nei

modi di uscita a e b , secondo la trasformazione

$$|0, 0, n\rangle \rightarrow |n, n, 0\rangle . \quad (6.27)$$

La trasformazione (6.27) può essere ottenuta per mezzo di un operatore $a_{(1,1)}^\dagger$ che crea contemporaneamente un fotone per ognuno dei modi di uscita a e b . Detto operatore deve essere un bosone e quindi deve essere tale che

$$[a_{(1,1)}, a_{(1,1)}^\dagger] = 1 , \quad [a_{(1,1)}, a^\dagger a + b^\dagger b] = 2a_{(1,1)} . \quad (6.28)$$

La forma esplicita dell'operatore è[2]

$$a_{(1,1)}^\dagger = a^\dagger b^\dagger \frac{1}{\sqrt{\max\{a^\dagger a, b^\dagger b\} + 1}} . \quad (6.29)$$

Esso opera sugli stati $|n_a, n_b\rangle$ la trasformazione

$$a_{(1,1)}^\dagger |n_a, n_b\rangle = \sqrt{(\min\{n_a, n_b\} + 1)} |n_a + 1, n_b + 1\rangle . \quad (6.30)$$

Con un procedimento analogo a quello utilizzato nel caso del PNA, è possibile ricavare da un operatore di evoluzione l'Hamiltoniana di interazione dello schema di Dirac per il PND

$$\hat{H}_I = a_{(1,1)}^\dagger c + \text{h.c.} , \quad (6.31)$$

con costanti del moto

$$\hat{s}_D = \frac{1}{2} (a^\dagger a + b^\dagger b + 2c^\dagger c) , \quad (6.32)$$

$$\hat{d}_D = a^\dagger a - b^\dagger b . \quad (6.33)$$

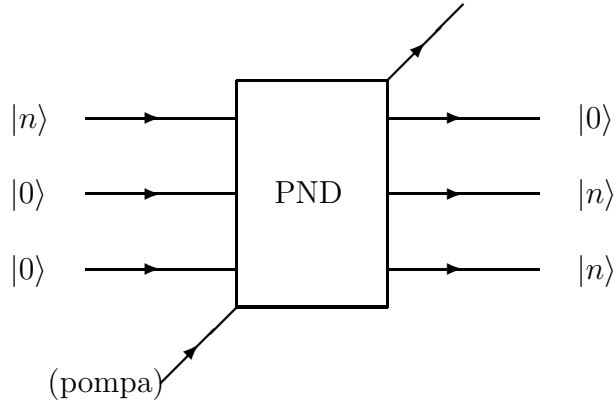


Figura 6.2: Schema di PND ideale.

Anche in questo caso è possibile ricavare la forma matriciale della Hamiltoniana (6.31) attraverso il cambiamento di base dello spazio degli stati

$$|n\rangle_{s_D} = |s_D - n, s_D - n, n\rangle. \quad (6.34)$$

Per autovalori di \hat{s}_D (numero totale di fotoni) fissati, l'Hamiltoniana (6.31) è una matrice tridiagonale superiore simmetrica che agisce sullo stato di ingresso $|n\rangle_{s_D}$ come segue

$$\hat{H}_I |n_s\rangle = \beta_n^{(s)} |n-1\rangle_s + \beta_{n+1}^{(s)} |n+1\rangle_s, \quad (6.35)$$

$$\beta_n^{(s)} = \sqrt{(s-n+1)n}. \quad (6.36)$$

Analogamente al caso del PNA la forma (6.31) è valida solo in risonanza, mentre fuori risonanza, per conservare l'energia è necessario introdurre un modo d di pompa in uno stato coerente a frequenza $\omega_d = \omega_a + \omega_b - \omega_c$; di conseguenza l'Hamiltoniana (6.31) diventa[2]

$$\hat{H}' = a_{(1,1)}^\dagger cd + \text{h.c.} . \quad (6.37)$$

ed è realizzabile mediante il dispositivo di figura (6.2).

6.4 Ottimizzazione della conversione di numero

[8] Le Hamiltoniane (6.26) e (6.37) sono difficili da realizzare in pratica a causa della presenza degli operatori di creazione multibosonici $a_{(G)}^\dagger$ e $a_{(1,1)}^\dagger$. Tuttavia è possibile approssimare gli operatori multibosonici nel caso in cui $\langle a^\dagger a \rangle \gg G$. Per $G = 2$ si ha

$$a_{(2)}^\dagger \simeq a^{\dagger 2} [2(a^\dagger a + 1)]^{-\frac{1}{2}}, \quad (\langle a^\dagger a \rangle \gg 2). \quad (6.38)$$

In questo modo l'Hamiltoniana (6.26) viene riscritta come

$$\hat{H}' \simeq a^{\dagger 2} [2(a^\dagger a + 1)]^{-\frac{1}{2}} cd + \text{h.c.} \quad (\text{PNA}). \quad (6.39)$$

Nel caso del duplicatore in corrispondenza di un dato numero di fotoni nel modo di ingresso c si ha lo stesso numero di fotoni nei modi a e b , quindi $a^\dagger a = b^\dagger b$. Dalla (6.33) si ha $d_D = 0$; questa condizione permette di riscrivere l'operatore $a_{(1,1)}^\dagger$ semplicemente come

$$a_{(1,1)}^\dagger = a^\dagger (a^\dagger a + 1)^{-\frac{1}{2}} b^\dagger, \quad (a^\dagger a = b^\dagger b). \quad (6.40)$$

Di conseguenza l'Hamiltoniana (6.37) viene semplificata e riscritta come segue

$$\hat{H}' = a^\dagger (a^\dagger a + 1)^{-\frac{1}{2}} b^\dagger cd + \text{h.c.} \quad (\text{PND}). \quad (6.41)$$

Una ulteriore semplificazione delle Hamiltoniane (6.39-6.41) è possibile se al posto dei termini dipendenti dall'intensità del campo (per es. $a^\dagger a$) vengono sostituiti i loro valori medi costanti. In questo modo le Hamiltoniane per il PNA e per il PND assumono la forma

$$\hat{H}_{FWM} = a^{\dagger 2} c d + \text{h.c.} \quad (\text{PNA}) , \quad (6.42)$$

$$\hat{H}_{FWM} = a^\dagger b^\dagger c d + \text{h.c.} \quad (\text{PND}) , \quad (6.43)$$

Come già visto per il PSA e per il PIA, anche le Hamiltoniane (6.42-6.43) sono ottenibili per mezzo di materiali con suscettività non lineare $\chi^{(3)}$ come spiegato in Ref. [13].

Facendo infine un'approssimazione parametrica di pompa classica le (6.42-6.43) si riscrivono nella forma

$$\hat{H}_I = a^{\dagger 2} c + \text{h.c.} \quad (\text{PNA}) , \quad (6.44)$$

$$\hat{H}_I = a^\dagger b^\dagger c + \text{h.c.} \quad (\text{PND}) . \quad (6.45)$$

Il tempo di interazione della radiazione con il dispositivo viene quindi ridotto del termine $\sqrt{I_d}$ corrispondente all'intensità della pompa d : la relazione che lega il tempo di interazione adimensionale τ ed il tempo reale t (dal quale si può risalire alla lunghezza del mezzo attivo necessaria per ottenere la conversione) è

$$\tau = \chi^{(3)} \sqrt{I_d} t . \quad (6.46)$$

6.5 Risultati Numerici

Figura 6.3: Rappresentazione dei segnali di uscita (figure in alto) e del rumore (figure in basso) per l'Hamiltoniana (6.43) nel caso di uno stato di ingresso con $n_i = 10$ fotoni. Le figure a sinistra si riferiscono al caso del duplicatore ($\langle n_a \rangle_0 = \langle n_b \rangle_0 = 0, \langle n_c \rangle_0 = n_i$); quelle a destra al caso del correlatore ($\langle n_a \rangle_0 = \langle n_b \rangle_0 = n_i, \langle n_c \rangle_0 = 0$). Le circonferenze stanno ad indicare i punti dove si ha la migliore conversione.

La valutazione numerica dell'evoluzione degli autostato del numero in ingresso nel PNA e nel PND è facilitata grazie alla forma tridiagonale delle Hamiltoniane (6.42-6.43) utilizzando i coefficienti

$$\alpha_n^{(s)} = \sqrt{n(s - 2n + 1)(s - 2n + 2)}, \quad (s \equiv s_a), \quad (6.47)$$

$$\beta_n^{(s)} = \sqrt{n}(s - n + 1), \quad (s \equiv s_D). \quad (6.48)$$

Figura 6.4: Migliori tempi di conversione per le Hamiltoniane (6.42-6.43). La figura a destra si riferisce al PND, quella a sinistra al PNA. I quadrati indicano i casi in cui i dispositivi sono usati come amplificatore/duplicatore, i cerchi nei casi di deamplificatore/correlatore.

In fig. (6.3) sono riportati i risultati ottenuti per il PND. In particolare è stato considerato uno stato di ingresso a 10 fotoni e studiata la sua evoluzione ad istanti successivi.

Dai grafici ottenuti si rivela un comportamento quasi-periodico del numero di fotoni in uscita e del rumore che diventa più irregolare all'aumentare del numero di fotoni in ingresso. Si riscontrano inoltre alcune differenze a seconda che il PND venga usato in modo diretto (duplicatore) o in modo inverso (correlatore). Nel primo caso si ha la massima conversione in corrispondenza di un rumore molto alto mentre si ha un basso rumore solo quando il segnale di uscita è praticamente inesistente. Se usato come correlatore, invece, il

Figura 6.5: Massimo guadagno effettivo per la Hamiltoniane (6.42-6.43). La figura a destra si riferisce al PND, quella a sinistra al PNA. I quadrati indicano i casi in cui i dispositivi sono usati come amplificatore/duplicatore, i cerchi nei casi di deamplificatore/correlatore.

PND presenta il massimo della conversione in presenza di un minimo del rumore. In entrambi i casi non si ottiene mai la conversione completa. L'analisi numerica del dispositivo è proseguita prendendo come tempo di conversione τ_* il tempo corrispondente al primo massimo locale del numero di fotoni in uscita nella fig. (6.3) e vedendo come questo tempo varia all'aumentare del numero di fotoni in ingresso; i risultati sono illustrati in fig.(6.4). Infine sono stati calcolati i massimi guadagni G_* (cioè i G_* ai tempi di conversione) al variare del numero di fotoni in ingresso fig. (6.5). Dalla fig. (6.5) si vede che il PNA usato come amplificatore presenta un guadagno decrescente rispetto al numero di fotoni fino al valore limite $G_* \simeq 1.28$, raggiunto per alti valori

Figura 6.6: Guadagno effettivo G_* del PNA con $G = 2$: i cerchi indicano il caso riferito all'Hamiltoniana (6.42); i triangoli indicano il comportamento per l'Hamiltoniana (6.39) che comprende il termine dipendente dall'intensità del campo in ingresso; la linea a tratto e punto indica il caso ideale

di n_i e quindi molto inferiore al guadagno ideale.

In maniera analoga il guadagno del duplicatore tende asintoticamente al valore $G_* \simeq .78$. Al contrario, i due dispositivi, se utilizzati come deamplificatore / correlatore, danno risultati più soddisfacenti. Infatti per alti valori di n_i il PNA riesce a raggiungere il guadagno ideale $G_* = 1/2$ mentre il PND usato come correlatore raggiunge un guadagno $G_* = 1$.

Una comparazione col caso ideale del deamplificatore è illustrata in fig. (6.6) per evidenziare come il comportamento del PNA sia in accordo con il caso ideale. Infine, in fig. (6.7) sono rappresentati gli andamenti dei fattori di Fano per i segnali di uscita. È evidente che sia per il PNA che per il PND, se

Figura 6.7: Fattori di Fano per i segnali di uscita per le Hamiltoniane (6.42-6.43) (PND a destra, PNA a sinistra. I quadrati indicano il caso di amplificazione / duplicazione; i cerchi quello di deamplificazione / correlazione; i triangoli indicano il comportamento per l'Hamiltoniana (6.39) che comprende il termine dipendente dall'intensità del campo in ingresso.

usati come amplificatore / duplicatore, la conversione è piuttosto rumorosa, mentre nel caso in cui vengono utilizzati come deamplificatore / correlatore presentano bassi fattori di Fano cioè un basso rumore in uscita.

Capitolo 7

Conclusioni

Abbiamo visto come i dispositivi descritti dalle Hamiltoniane (6.39) e (6.41) non si riescano a concretizzare l'amplificazione e la duplicazione del numero in maniera soddisfacente. L'eccessivo rumore che si rileva sui canali di uscita dell'amplificatore e del duplicatore può essere attribuito (vedi Ref. [10]) alla cosiddetta *emissione stimolata parametrica*. Infatti, come è spiegato nella Ref. [9], le Hamiltoniane (6.39) e (6.41) sono formalmente simili all'Hamiltoniana[10]

$$H_I = \hbar\kappa(ab^\dagger c^\dagger + a^\dagger bc) \quad (7.1)$$

che descrive un amplificatore laser. In particolare l'Hamiltoniana (6.41) può essere messa in corrispondenza con l'Hamiltoniana che rappresenta l'interazione in risonanza di un modo di radiazione con un sistema di N atomi a due livelli[10]

$$\hat{H}_I \propto a^\dagger \hat{J}_- + a \hat{J}_+ , \quad (7.2)$$

dove $\hat{J}_\alpha = \sum_{i=1}^N \sigma_i^\alpha$ sono gli operatori di ribaltamento dell spin totale degli N atomi. Infatti gli operatori del momento angolare possono essere riscritti in termini degli operatori di creazione e di annichilazione dei modi b e c come segue

$$\hat{J}_+ = bc^\dagger, \quad \hat{J}_- = b^\dagger c, \quad \hat{J}_z = \frac{1}{2} (c^\dagger c - b^\dagger b),$$

(7.3)

$$\hat{J} = \frac{1}{2} (c^\dagger c + b^\dagger b), \quad J = \frac{N}{2}.$$

Indicando con M la componente $J-z$ del momento angolare totale è possibile calcolarne il valore nei due casi in cui l'Hamiltoniana (6.41) rappresenti il modo di funzionamento diretto (duplicatore) o quello inverso (correlatore). Nel primo caso lo stato di ingresso è composto da n_i fotoni nel modo c e dal vuoto nei modi a e b , ovvero $\langle n_a \rangle_0 = 0$ e $\langle n_c \rangle_0 = n_i$, con $n_a = n_b$. Nel caso del correlatore $\langle n_a \rangle_0 = n_i$ e $\langle n_c \rangle_0 = 0$. Tuttavia in entrambi i casi per il valore assoluto di M si ha $|M| = J$ che corrisponde esattamente allo stato “superfluorescente” [9] per il convertitore parametrico. In conclusione è possibile affermare che sia il rumore di uscita che il guadagno effettivo non ideale sono segnali della presenza di emissione spontanea nel convertitore parametrico.

Capitolo 8

Bibliografia

- [1] H. P. Yuen, *Phys. Rev. A* **13** 2226 (1976)
- [2] G. M. D'Ariano, *Int. J. Mod. Phys. B* **6**, 1291 (1992) e referenze ivi citate.
- [3] G. M. D'Ariano, Dottorato di Ricerca in Fisica; corso di "Seminari di struttura della materia", seminari di ottica quantistica. A.A. 1990-91
- [4] J. V. Schwinger in *Quantum Theory of Angular Momentum*, L. C. Biedernharn and H. Van Dom, eds. (Academic, New York 1965)
- [5] R. Loudon *The Quantum Theory of Light*, Clarendon Press, Oxford (1983)
- [6] M. Artiglia e M. Potenza *Progetto di amplificatori ottici in fibra attiva*, Alta Frequenza, Rivista di elettronica, Vol. IV, p. 217
- [7] R. A. Brandt and O. W. Greenberg *J. Math. Phys.* **10** 1168 (1969)

- [8] G.M. D'Ariano e C. Macchiavello *Photon number amplification/duplication through parametric conversion.*, Squeezed States and Uncertainty Relations, Joint Lebedev-Mariland Workshop, Mosca 25-29 Maggio 1992
- [9] D. F. Walls, in *Quantum Optics, Proceedings of the Scottish University Summer School, 10th; Edinburg 1969*, edited by S. M. Kay and Maitland (Academic, New York, 1970), p.501
- [10] R. Graham, nello stesso volume di Ref. [9], p.489
- [11] R. Loudon and P. L. knight, *J. Mod. Opt.* **34** 709 (1987); B. L. Schumaker, *Phys. Rep.* **135** 317 (1986); C. M. Caves and B. L. Schumaker, *Phys. Rev. A* **31** 3068 (1985); K. Wodkiewicz and J. H. Eberly, *J. Opt. Soc. Am.* **B2** 458 (1985)
- [12] V. Buzu ek and T. Quang, *J. Opt. Soc. Am.* **B6** 2447 (1989)
- [13] G. M. D'Ariano, *Phys. Rev. A* **45**, 3224 (1992)
- [14] G. M. D'Ariano, *Phys. Rev. A* **41**, 2636 (1990); *Phys. Rev. A* **43**, 2550 (1991)